MECHANIKA TUHÉHO TELESA

najprv len v dvoch rozmeroch

mechanika 21

telesá nezanedbateľnej veľkosti

- doteraz sme sa zaoberali mechanikou telies (relatívne) zanedbateľnej veľkosti (hovorí sa im hmotné body)

- teraz sa pozrieme na mechaniku telies nezanedbateľnej veľkosti, ktoré sú ale (dokonale) tuhé – nemenia svoj tvar

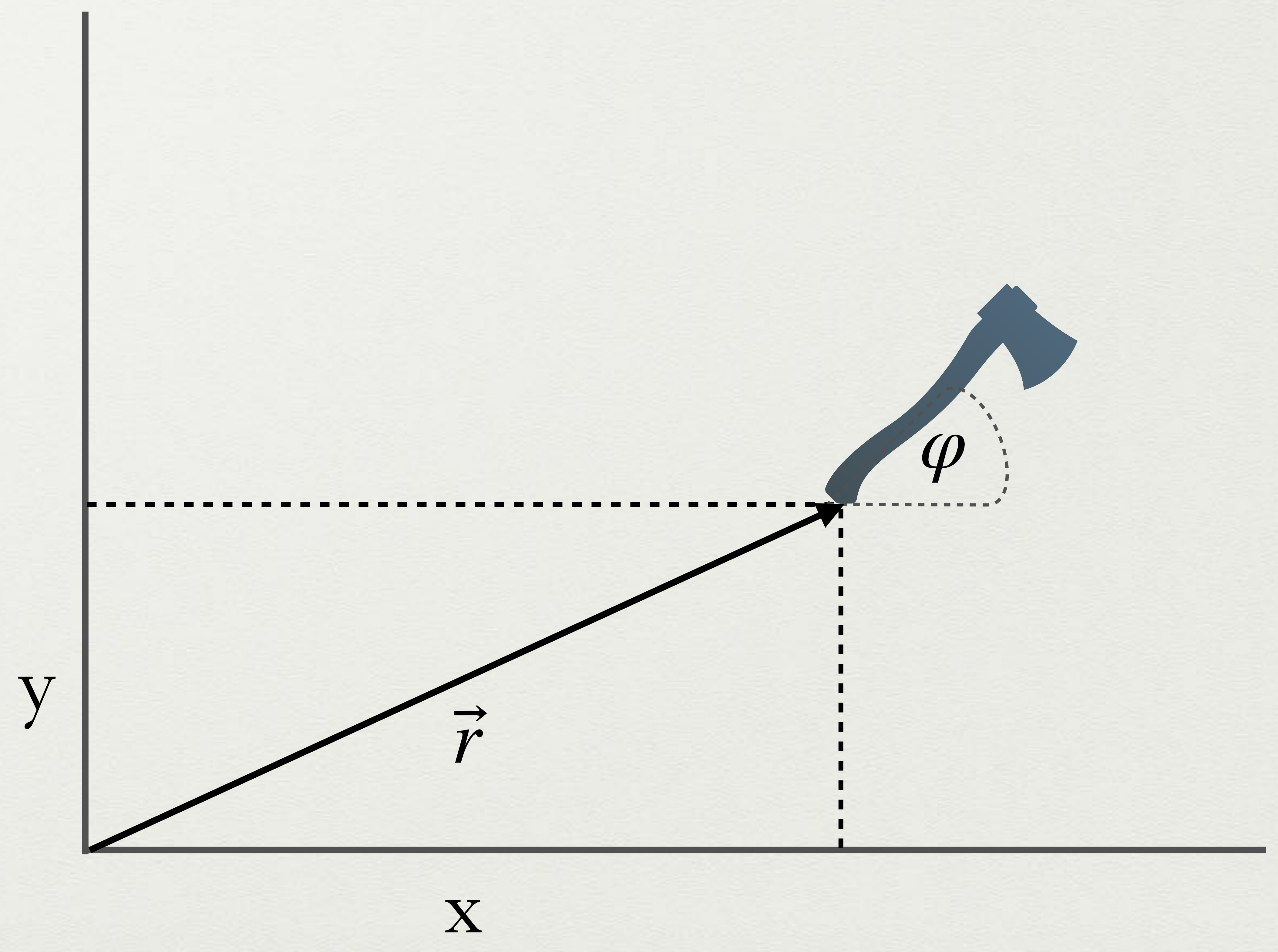
- zo začiatku budeme uvažovať len dva rozmery, pretože tam je všetko o dosť jednoduchšie (do troch rozmerov sa vydáme až keď zvládneme 2D prípad)

určenie polohy telesa v dvoch rozmeroch

- prirodzené určenie polohy tuhého telesa: poloha jedného konkrétneho bodu telesa a k tomu ešte orientácia telesa v priestore

- v dvojrozmernom prípade je orientácia telesa určená jedným uhlom

- konvencia: v prípade uhla za kladný smer zvykneme považovať smer opačný, ako je smer pohybu hodinových ručičiek

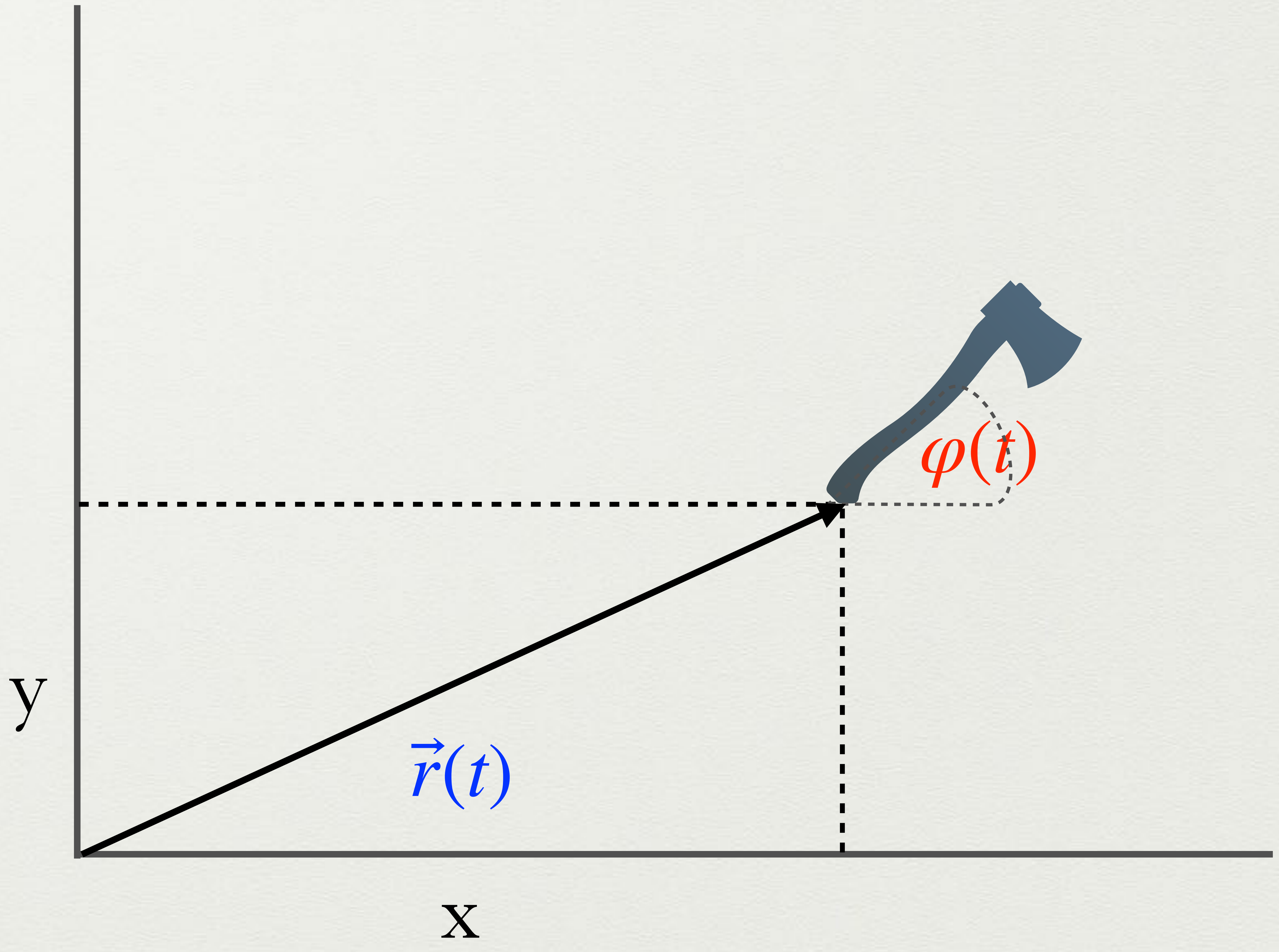


určenie pohybu telesa v dvoch rozmeroch

- poloha ako funkcia času, čiže jednak pohyb telesa “ako celku”, opísaný funkciou $\vec{r}(t)$ a jednak jeho rotácia, opísaná funkciou $\varphi(t)$

- pre funkciu $\vec{r}(t)$ platí podobná (rovnaká) diferenciálna rovnica ako pre polohový vektor hmotného bodu (takže všetko, čo sme sa naučili tam, ostáva v platnosti aj tu)

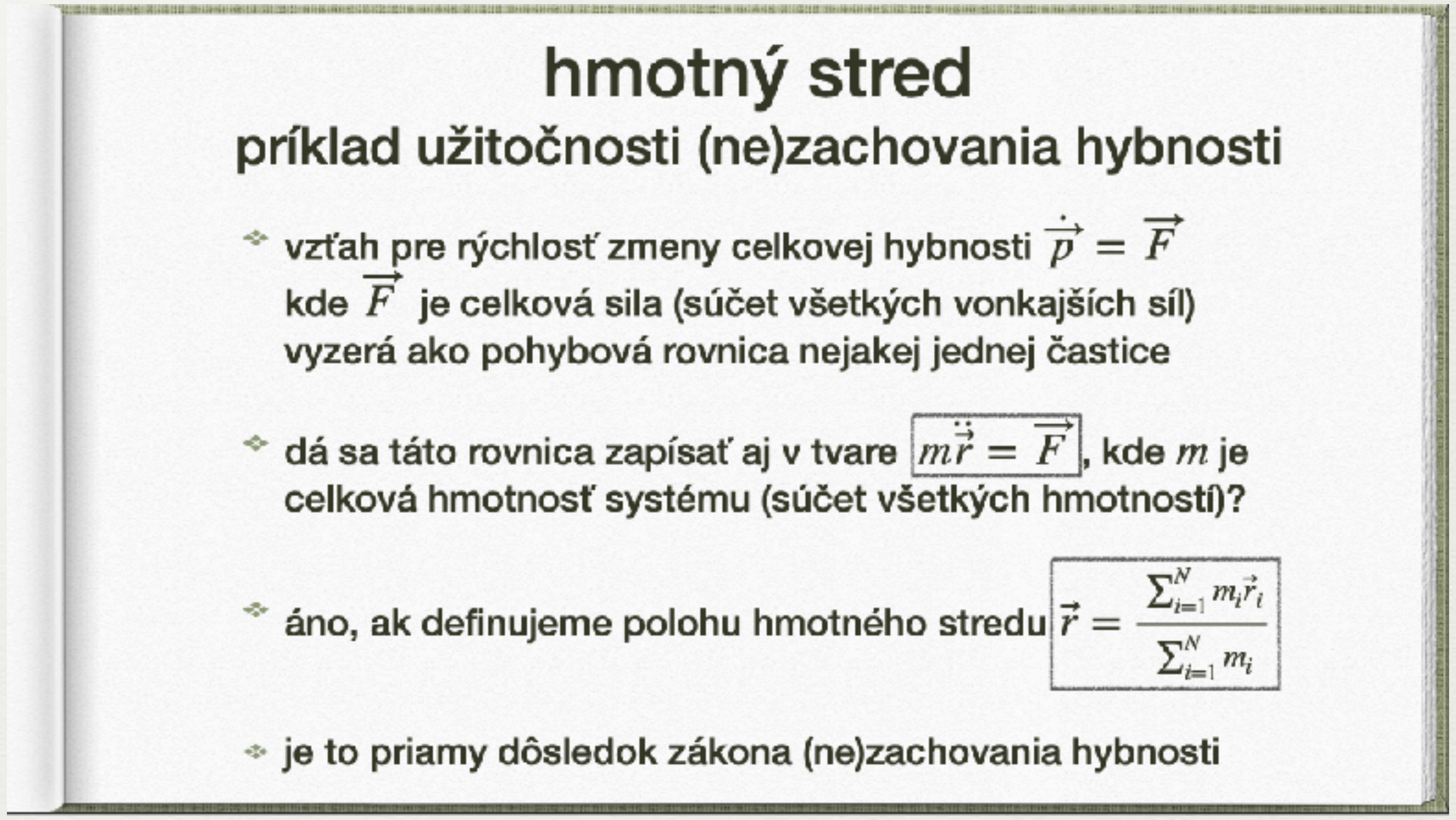
- pre funkciu $\varphi(t)$ odvodíme teraz analogickú diferenciálnu rovnicu a naučíme sa ju riešiť v niektorých dôležitých prípadoch



pohybová rovnica pre polohový vektor tuhého telesa

- rovnica pre $\vec{r}(t)$ závisí od výberu bodu, pomocou ktorého určujeme polohu celého tuhého telesa

- ak je niektorý bod nášho tuhého telesa upevnený, je rozumné vybrať tento bod, pretože potom preň nijakú pohybovú rovnicu nepotrebujeme



- ak nie je nijaký bod upevnený, potom je asi najrozumnejšie vybrať hmotný stred, pre ktorý už pohybovú rovnicu poznáme:

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ kde $\vec{F}$ je celková vonkajšia sila

pohybová rovnica pre orientáciu tuhého telesa

- diferenciálnu rovnicu pre $\varphi(t)$ odvodíme teraz: výpočítame druhú časovú deriváciu uhla $\varphi(t)$, vyjadríme ju pomocou zložiek zrýchlení a tie vyjadríme zo zákona sily

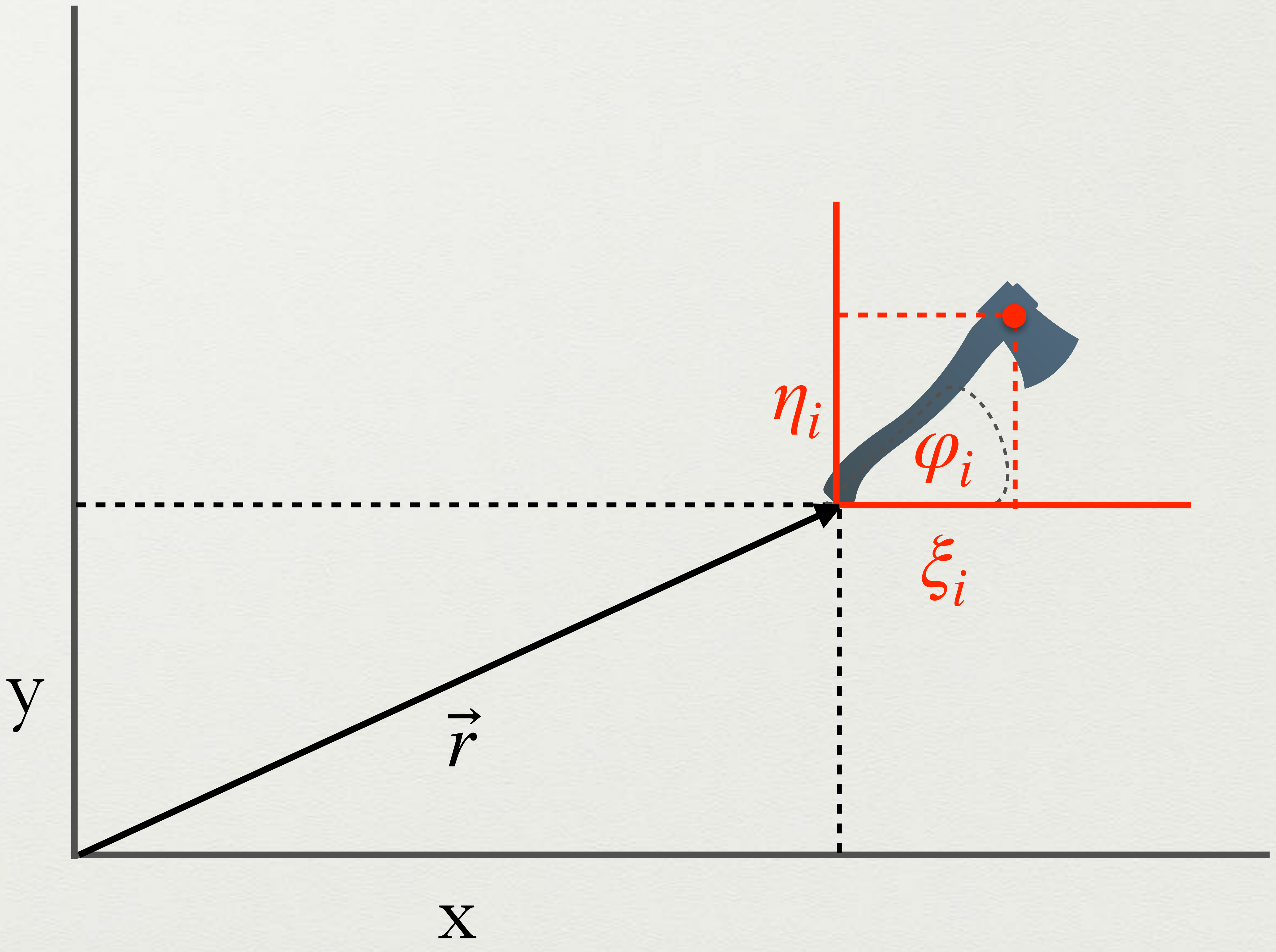
- výsledná rovnica bude mať tvar $I\ddot{\varphi}(t) = M$ kde M je takzvaný moment sily (s ktorým sme sa už stretli) a I je takzvaný moment zotrvačnosti (s ktorým sa zoznámime teraz)

- moment sily môže závisieť od uhla, uhlovej rýchlosti aj od času, a dokonca aj od polohy telesa ako celku

naším cieľom bude vedieť napísať a vyriešiť napríklad pohybové rovnice pre vrh sekerou a posúdiť, či je nakreslená trajektória sekery blbosť, alebo či je v súlade s Newtonom

uhol, uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie

- uvažujme pomocnú súradnicovú sústavu, ktorej počiatok je vo vybranom bode $\vec{r}(t)$
- súradnice i-teho bodu telesa v pomocnej súradnicovej sústave označme $\xi_i(t)$ $\eta_i(t)$
- uhol $\varphi_i(t) = \arctan \frac{\eta_i(t)}{\xi_i(t)}$ závisí od i
- uhlová rýchlosť $\omega(t) = \dot{\varphi}_i(t)$ nezávisí od i je rovnaká pre všetky body tuhého telesa
- uhlové zrýchlenie $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}_i(t)$



výpočet uhlovej rýchlosti

- derivácia funkcie arcus tangens $\dfrac{d}{dt}\arctan t = \dfrac{1}{1+t^2}$
- derivácia zloženej funkcie $\dfrac{d}{dt}\arctan g(t) = \dfrac{1}{1+g^2(t)}\;\dot{g}(t)$
- derivácia funkcie $g(t) = \dfrac{\eta_i(t)}{\xi_i(t)}$ $\qquad \dot{g}(t) = \dfrac{\dot{\eta}_i(t)\xi_i(t) - \eta_i(t)\dot{\xi}_i(t)}{\xi_i^2(t)}$
- uhlová rýchlosť $\qquad \omega(t) = \dfrac{\dot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\dot{\xi}_i(t)}{\xi_i^2(t)+\eta_i^2(t)} = \dfrac{\dot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\dot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$

$\rho_i^2 = \xi_i^2(t) + \eta_i^2(t)$ je od času nezávislý kvadrát vzdialenosti i-teho bodu od počiatku pomocnej súradnicovej sústavy (vzájomné vzdialenosti bodov ani vzdialenosti bodov od hmotného stredu sa v tuhom telese s časom nemenia)

výpočet uhlového zrýchlenia

- ďalej vypočítame uhlové zrýchlenie $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t)$ kde $\omega(t) = \dfrac{\dot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\dot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$
- keďže menovateľ nezávisí od času, derivácia je

$$\dot{\omega}(t) = \frac{\ddot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) + \dot{\eta}_i(t)\,\dot{\xi}_i(t) - \dot{\eta}_i(t)\,\dot{\xi}_i(t) - \eta_i(t)\,\ddot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2} = \frac{\ddot{\eta}_i(t)\,\xi_i(t) - \eta_i(t)\,\ddot{\xi}_i(t)}{\rho_i^2}$$

- zvláštny a nie úplne najprirodzenejší výraz v čitateli sa bude (bohužiaľ) vyskytovať často, a preto je dobré poznať niekoľko jeho iných vyjadrení, ktoré sa teraz naučíme

$a_x b_y - a_y b_x$

- majme dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ so zložkami

$$a_x = a\cos\alpha \qquad a_y = a\sin\alpha$$
$$b_x = b\cos\beta \qquad b_y = b\sin\beta$$

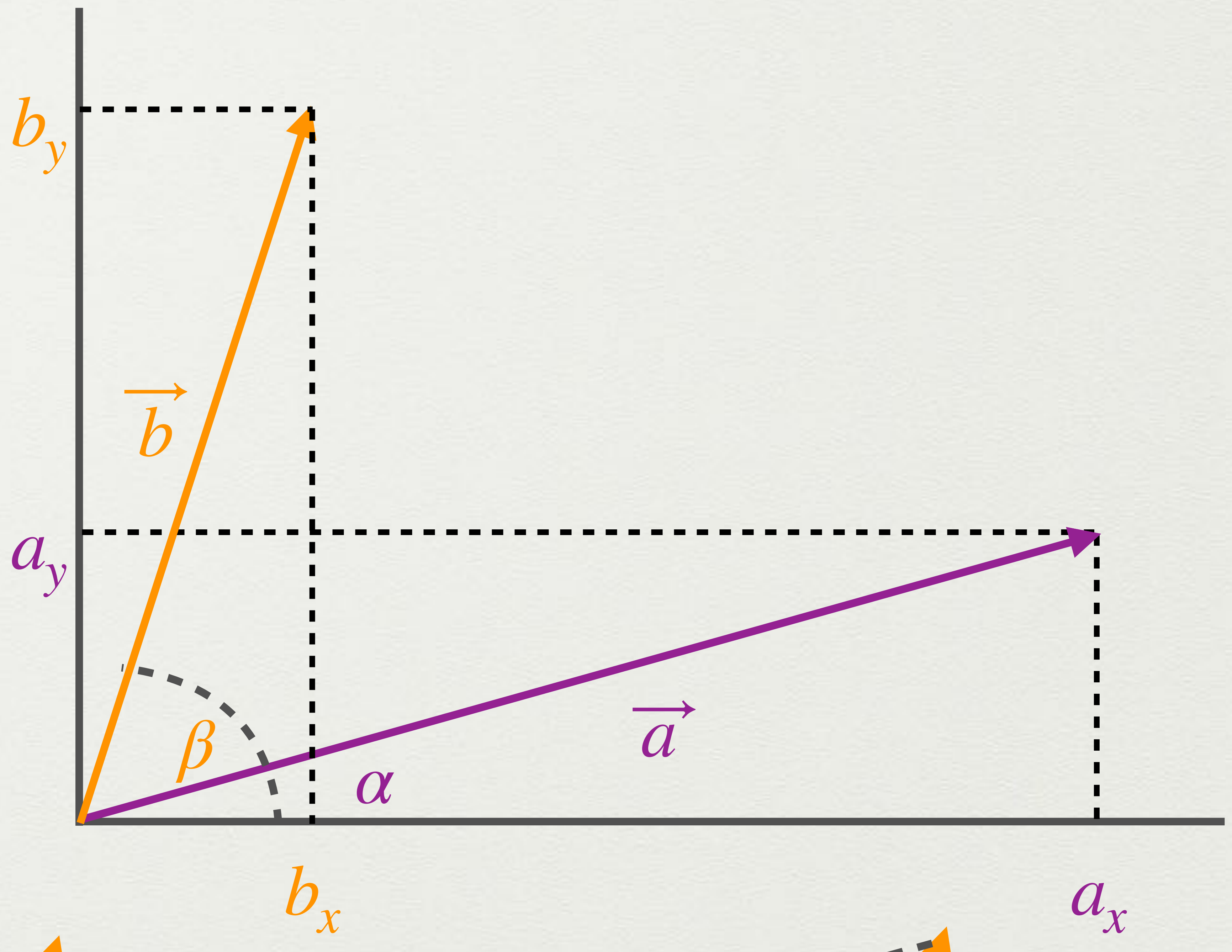
- $a_x b_y - a_y b_x = a\,b\,(\cos\alpha\ \sin\beta - \cos\beta\ \sin\alpha)$

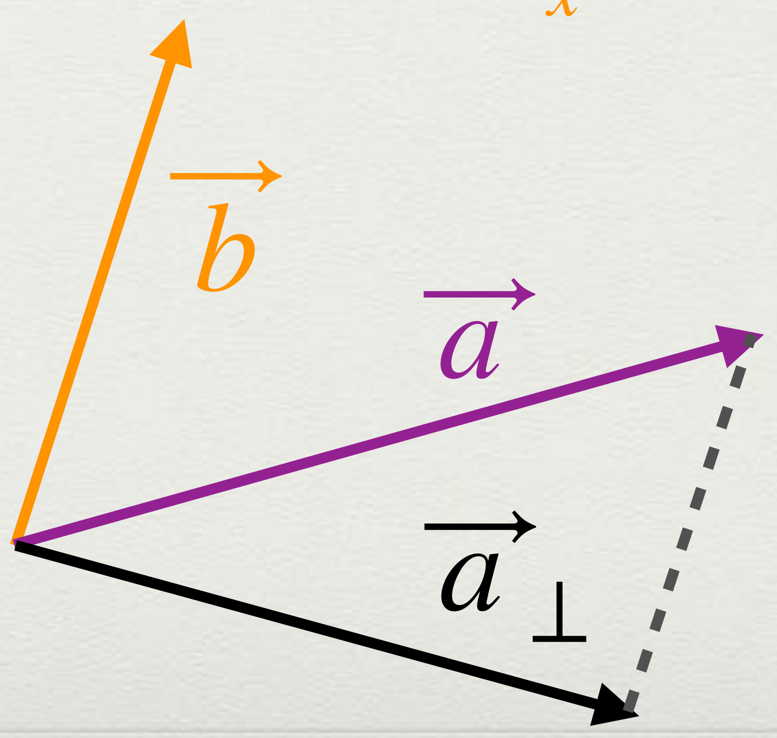
$$= a\,b\ \sin(\beta - \alpha) = a\,b\ \sin\phi$$

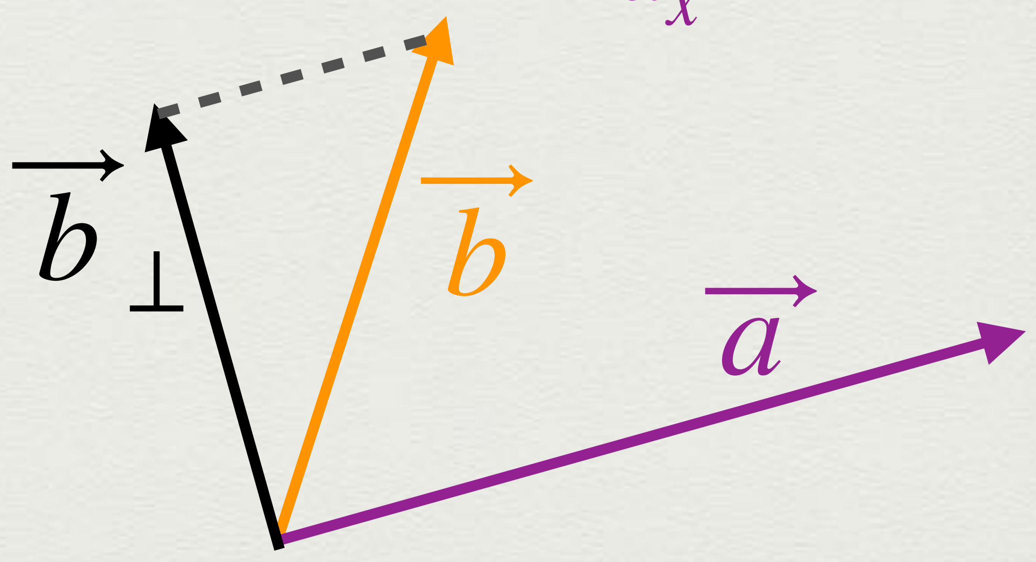
kde ϕ je uhol medzi vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (orientovaný uhol smerujúci od $\vec{a}$ ku $\vec{b}$)

- výraz $a\,b\ \sin\phi$ sa dá zapísať aj ako súčin veľkosti jedného vektora a kolmej zložky druhého vektora (ktorej sa hovorí rameno)

$$a\,b\ \sin\phi = a_\perp\, b = a\, b_\perp$$







súvis s vektorovým súčinom

- v troch rozmeroch je výraz $a_x b_y - a_y b_x$ z-ovou zložkou vektora $\vec{a} \times \vec{b}$
- v dvoch rozmeroch nemáme nič také, ako vektorový súčin
- ale ak chápeme 2D priestor ako podpriestor 3D priestoru,
potom má vektorový súčin dobrý zmysel (v tom 3D) a dá sa používať
- takže dostávame ešte jeden možný zápis nášho výrazu, a síce

$$a_x b_y - a_y b_x = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_z$$

pohybová rovnica pre orientáciu tuhého telesa

- nech sa tuhé teleso skladá z *N* hmotných bodov (s pevnými vzájomnými vzdialenosťami)

- vynásobme rovnicu pre uhlové zrýchlenie hmotnosťou *i*-teho bodu: $m_i \rho_i^2 \varepsilon = \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$

- sčítajme cez všetky body (od *i=1* po *N*):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$$

- toto je pohybová rovnica pre orientáciu telesa, ale väčšinou sa používa šikovnejší zápis

- šikovnejší zápis: $\boxed{I \varepsilon = M}$

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2$$ sa nazýva <u>moment zotrvačnosti</u>

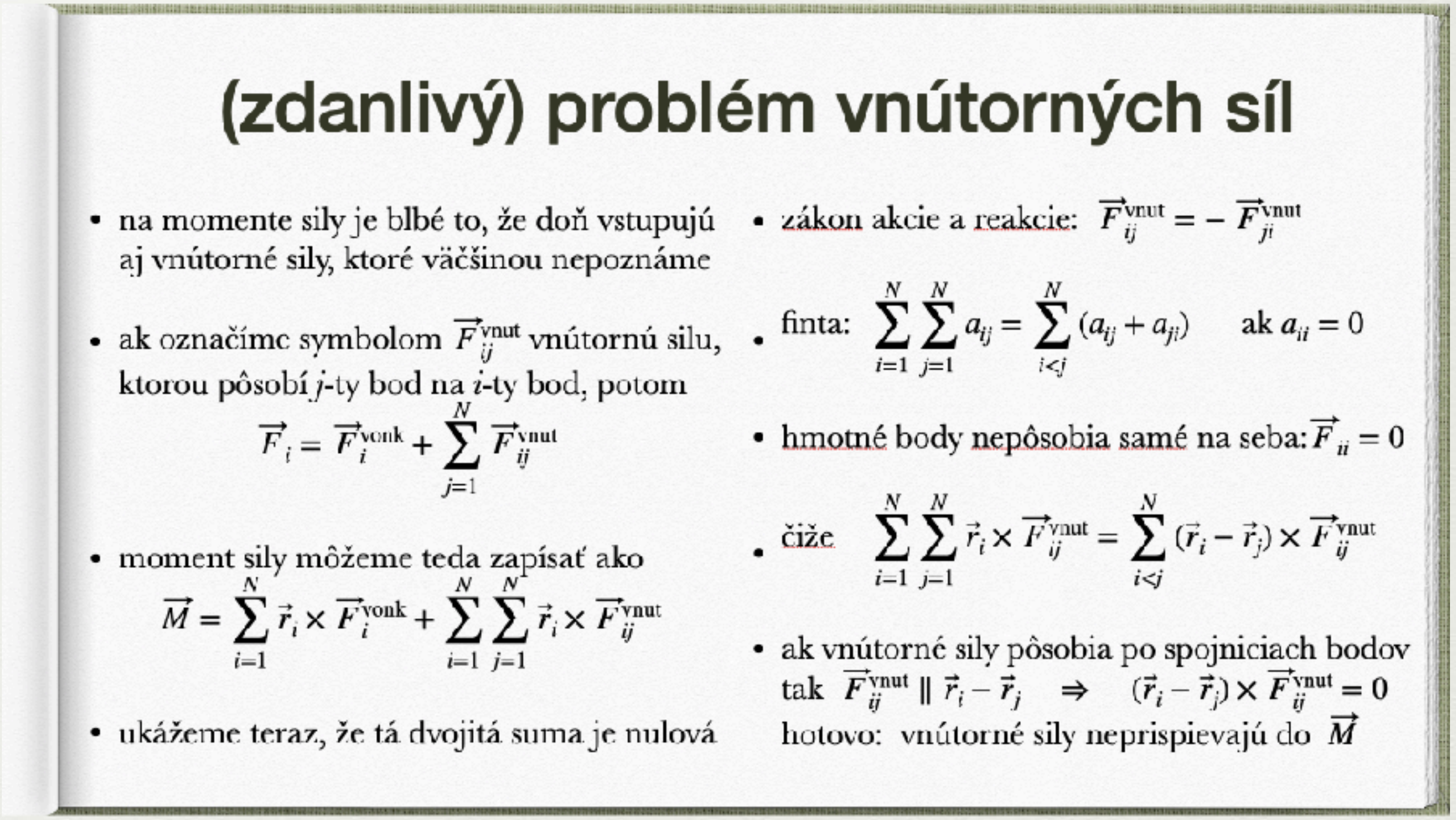
$$M = \sum_{i=1}^{N} \xi_i F_{\eta,i} - \eta_i F_{\xi,i}$$ sa nazýva <u>moment sily</u>

- moment zotrvačnosti vzhľadom k nejakému konkrétnemu bodu tuhého telesa <u>nezávisí</u> od orientácie telesa, od jeho uhlovej rýchlosti ani od času (pretože v sume vystupujú od času nezávislé hmotnosti a kvadráty vzdialeností)

poznámka o vnútorných silách

- v prípade momentu sily $\vec{M}$ v 3D sme v prednáške o zákonoch zachovania ukázali, že ak vnútorné sily pôsobia po spojniciach a platí pre ne zákon akcie a reakcie, potom tieto sily neprispievajú do momentu sily

- rovnaká vec platí aj pre moment sily M v 2D, čiže pri výpočte M stačí brať do úvahy len vonkajšie sily



(zdanlivý) problém vnútorných síl

- na momente sily je blbé to, že doň vstupujú aj vnútorné sily, ktoré väčšinou nepoznáme
- ak označíme symbolom $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$ vnútornú silu, ktorou pôsobí j-ty bod na i-ty bod, potom
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$
- moment sily môžeme teda zapísať ako
$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{vonk}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$$
- ukážeme teraz, že tá dvojitá suma je nulová
- zákon akcie a reakcie: $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{vnut}}$
- finta: $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum_{i<j}^{N} (a_{ij} + a_{ji})$ ak $a_{ii} = 0$
- hmotné body nepôsobia samé na seba: $\vec{F}_{ii} = 0$
- čiže $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = \sum_{i<j}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}}$
- ak vnútorné sily pôsobia po spojniciach bodov tak $\vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j \Rightarrow (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{vnut}} = 0$
hotovo: vnútorné sily neprispievajú do $\vec{M}$

- dôkaz: stačí zobrať už urobený dôkaz v 3D a brať v ňom do úvahy z zložku

iná možnosť: spomínaný dôkaz v 3D berte len ako inšpiráciu pre dôkaz v 2D priamo z definície

podobnosti a rozdiely

jednorozmerný posuvný pohyb

- pohybová rovnica: $m\,\ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, t)$
- hmotnosť m býva zadané (zmerané) číslo
- sila F je nejaká dopredu zadaná funkcia polohy, rýchlosti a času a s touto zadanou funkciou riešime diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $x(t)$

dvojrozmerný rotačný pohyb

- pohybová rovnica: $I\,\ddot{\varphi}(t) = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$
- moment zotrvačnosti I treba vypočítať
- moment sily M ako konkrétnu funkciu uhla, uhlovej rýchlosti a času treba vypočítať a až potom môžeme riešiť diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $\varphi(t)$

ak sú posuvný a rotačný pohyb navzájom previazané, potom

$m\,\ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$ a $I\,\ddot{\varphi}(t) = M(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}, t)$

ešte dve podobnosti

- kinetická energia rotujúceho telesa je súčtom kinetických energií jeho častí
$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- rýchlosti jednotlivých častí sú $v_i = \rho_i \omega$ celkove pre kinetickú energiu máme
$$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ pre dvojrozmerné rotácie

  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ pre jednorozmerné translácie

- moment hybnosti je v 2D definovaný analogicky ako moment sily
$$L = \sum_{i=1}^{N} \xi_i p_{\eta,i} - \eta_i p_{\xi,i}$$

- $\xi p_\eta - \eta p_\xi = \rho p_\perp = m \rho^2 \omega$ (pri pohybe po kružniciach $p_\perp = p$ a $p = m \rho \omega$)
$$L = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \omega = I \omega$$

- $L = I \omega$ pre dvojrozmerné rotácie

  $p = m v$ pre jednorozmerné translácie

všeobecný prípad dvojrozmerného pohybu

- v mnohých prípadoch sa dajú posuvný a rotačný pohyb vyšetrovať oddelene
- vo všeobecnosti však neplatí, že sily závisia len od polohy a nie od orientácie, rovnako ako neplatí, že momenty síl závisia len od orientácie a nie od polohy
- vo všeobecnosti sú pohybové rovnice pre posuvný a pre rotačný pohyb

$$m\,\ddot{\vec{r}}(t) = \overrightarrow{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \varphi, \dot{\varphi}, t) \qquad\qquad I\,\ddot{\varphi}(t) = M(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$$

navzájom previazané a musia sa riešiť naraz a spolu

upútavka na záver

- moment zotrvačnosti a moment sily hrajú v 2D rotáciách rovnakú úlohu, ako hrajú hmotnosť a sila v 1D transláciách (posunutiach)
- na rozdiel od hmotnosti a sily, ktoré bývajú často známe, moment zotrvačnosti a moment sily treba väčšinou najprv pre každú konkrétnu situáciu vypočítať (a až potom môžeme pristúpiť k riešeniu pohybových rovníc)
- momenty zotrvačnosti a sily máme zatiaľ definované len vzhľadom k počiatku a len pre nespojité tuhé teleso zložené z diskrétnych hmotných bodov
- v ďalšej prednáške sa naučíme, ako sa počítajú momenty zotrvačnosti a sily pre tuhé teleso so spojite rozloženou hmotou a vzhľadom k ľubovoľnému bodu