

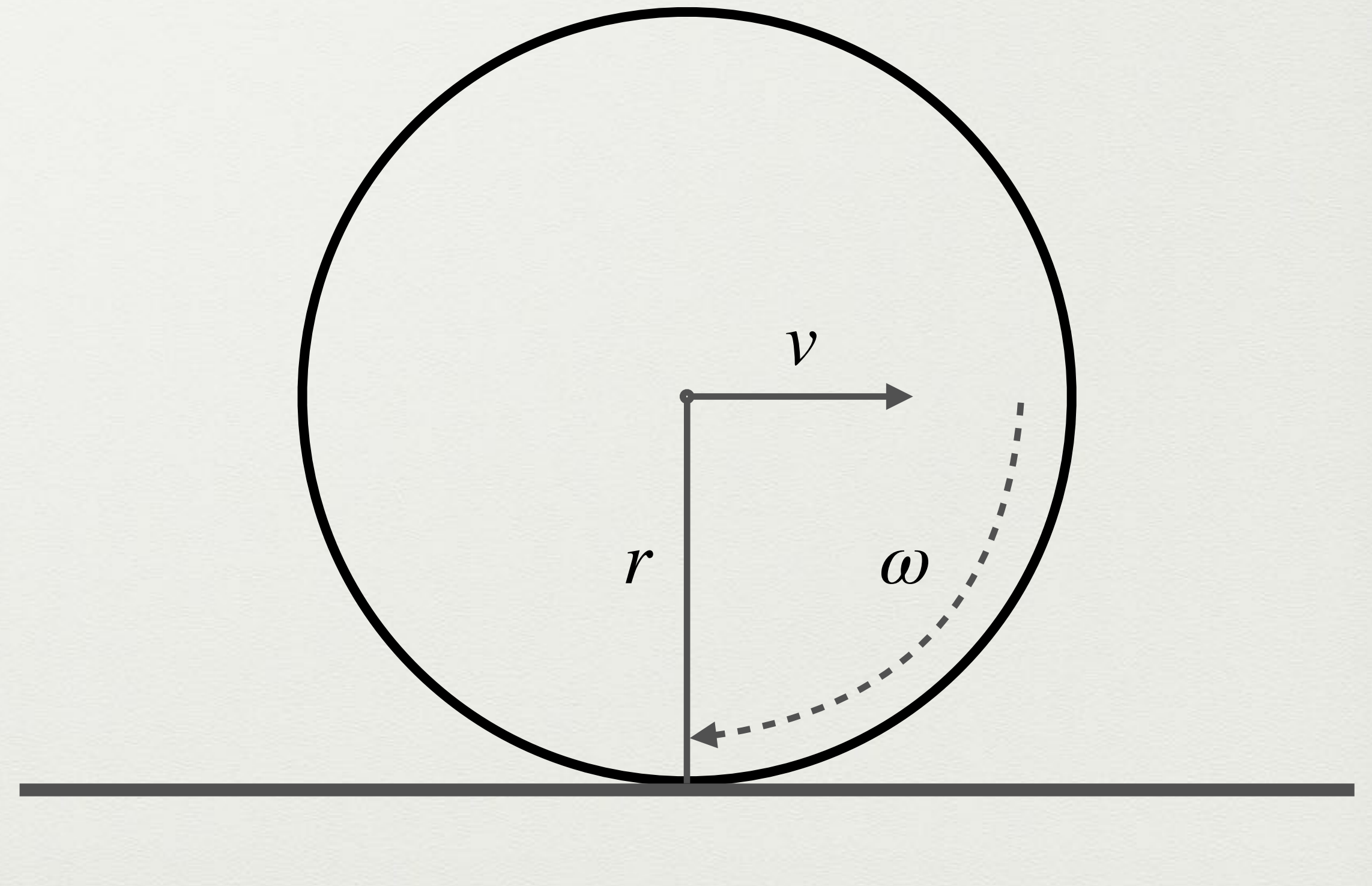
# KOLESO

dôležitý a často opomínaný stredoškolský príklad



# valivý pohyb

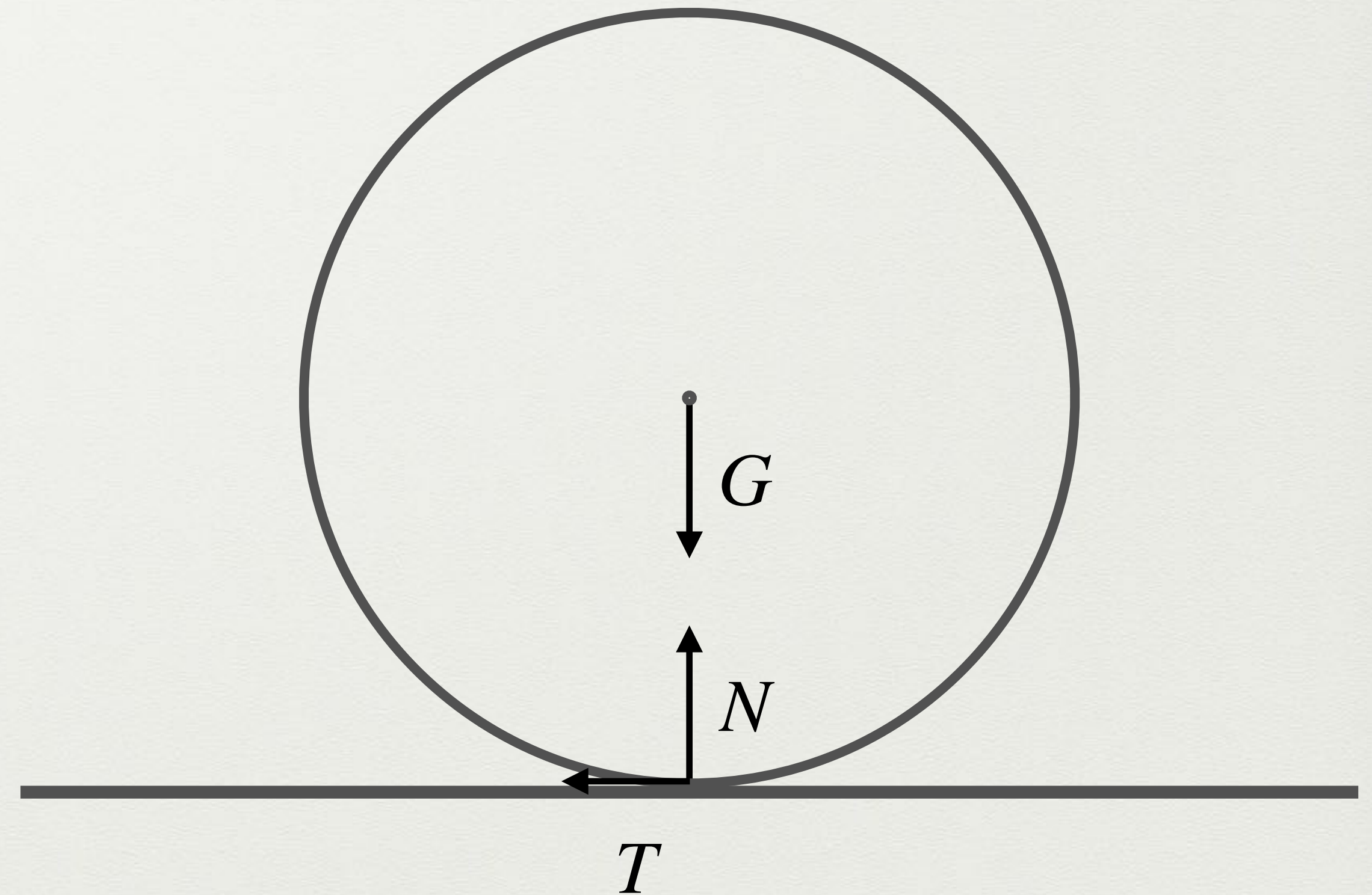
- valivý pohyb kolesa je pohyb bez šmyku, t.j. pohyb, pri ktorom sa bod kolesa dotýkajúci podložky vzhľadom k podložke nepohybuje
- koleso s polomerom  $r$  a uhlovou rýchlosťou  $\omega$ : body na jeho obvode sa pohybujú rýchlosťou, ktorej veľkosť je  $|\omega| r$  (absolútna hodnota preto, lebo  $\omega$  môže byť aj záporné, ako je na obrázku)
- ak sa stred kolesa hýbe vzhľadom k podložke rýchlosťou  $v$ , jeho spodný bod sa vzhľadom k podložke nehýbe práve vtedy, keď  $v = -\omega r$





# sily pôsobiace na koleso

- vertikálne sily: jednak gravitačná sila  $G$ , ktorou pôsobí na koleso Zem, a jednak sila  $N$ , ktorou pôsobí na koleso podložka (pomerne často sa nesprávne hovorí, že ide o sily akcie a reakcie)
- horizontálne sily: pokiaľ nepôsobí nič iné, tak jedinou horizontálnou silou je trenie
- ak sa koleso valí, jeho spodný bod sa v mieste dotyku vzhľadom k podložke nepohybuje, takže ide o statické trenie
- veľkosť sily statického trenia je  $|T| \leq f_s N$





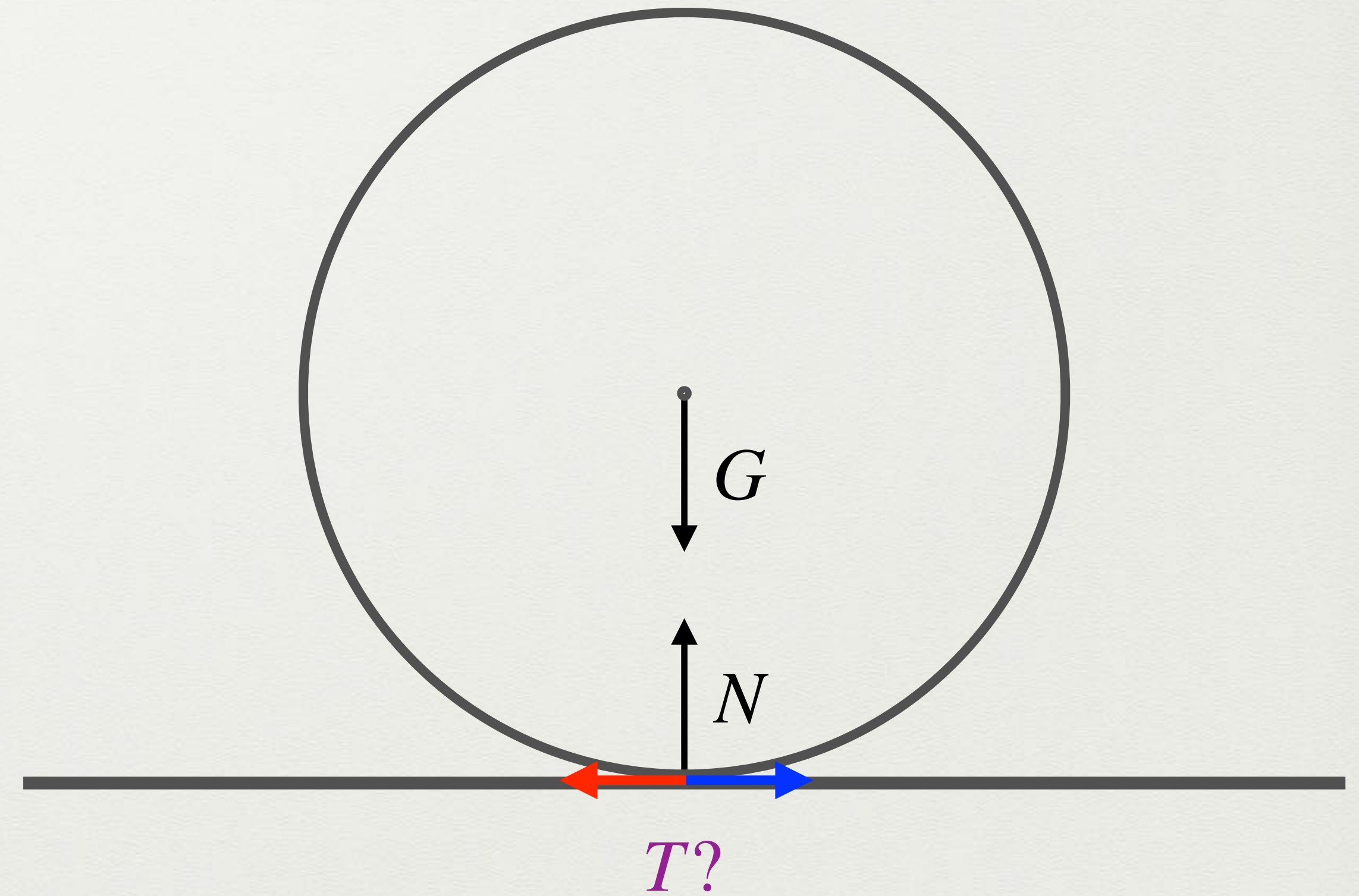
# poznámka o silách akcie a reakcie

- ak teleso podoprieme alebo zavesíme, potom sily pružnosti v telese a v podpere či závese dajú takú výslednú silu, aby sa v zvislom smere nekonal nijaký pohyb
- často sa hovorí, že je to vďaka zákonu akcie a reakcie, ale to je nesprávne
- v hre sú totiž štyri sily: 1. gravitačná sila, ktorou pôsobí Zem na teleso  
2. gravitačná sila, ktorou pôsobí teleso na Zem 3. dotyková sila, ktorou pôsobí podpera či záves na teleso (ide o dôsledok pružnosti, čo je dôsledok elmag síl)  
4. dotyková sila, ktorou pôsobí teleso na podperu či záves
- 1 a 2 sú akcia-reakcia, 3 a 4 sú akcia-reakcia, 1 a 3 nie sú akcia-reakcia (napriek tomu, že 1 a 3 sú rovnako veľké a opačne orientované)



# paradox valiaceho sa kolesa

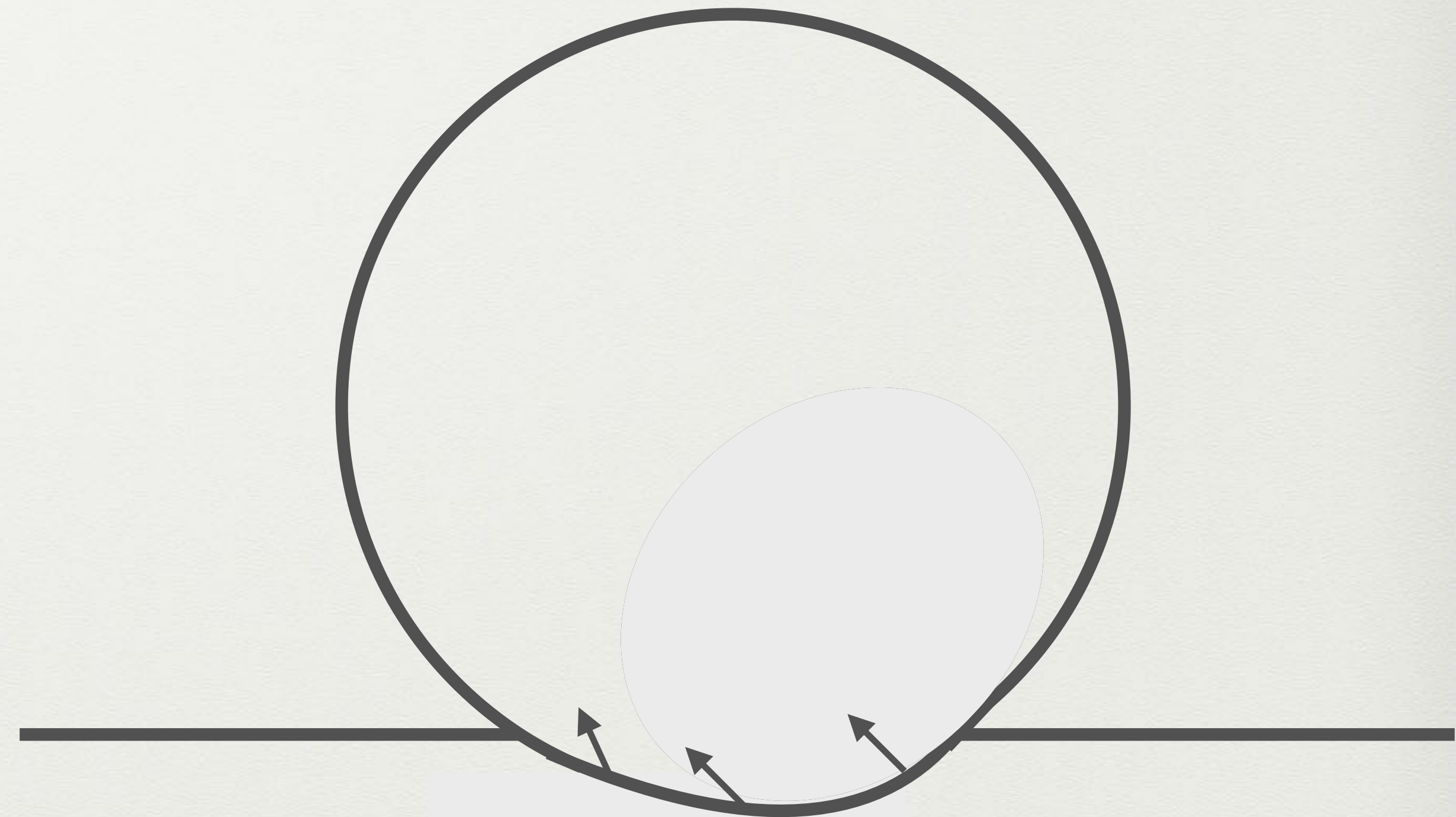
- ak statické trenie pôsobí v smere opačnom ako je smer rýchlosti, potom rýchlosť klesá, ale uhlová rýchlosť sa zväčšuje, čiže koleso sa prestane valiť (začne sa prešmykovať)
- ak statické trenie pôsobí v rovnakom smere ako je smer rýchlosti, potom rýchlosť rastie, ale uhlová rýchlosť klesá, čiže koleso sa prestane valiť (opäť sa začne prešmykovať)
- čiže ak sa má koleso valiť, statické trenie musí byť nulové, lenže vtedy sa koleso valí bez zmeny rýchlosti donekonečna (???)





# kde je pes zakopaný?

- v bode dotyku, ktorý nie je bodom dotyku
- v skutočnosti sa koleso aj podložka deformujú, takže sa dotýkajú v nejakej oblasti obsahujúcej (nekonečne) veľa bodov
- sily od podložky pôsobia na koleso vo všetkých týchto bodoch a ak ich chceme nahradiť jednou výslednou silou, musíme ju umiestniť tak, aby bol jej moment rovný výslednému momentu síl pôsobiacich v jednotlivých bodoch dotyku
- kľúčová otázka: do ktorého bodu treba umiestniť výslednú silu, ktorou pôsobí na koleso podložka?

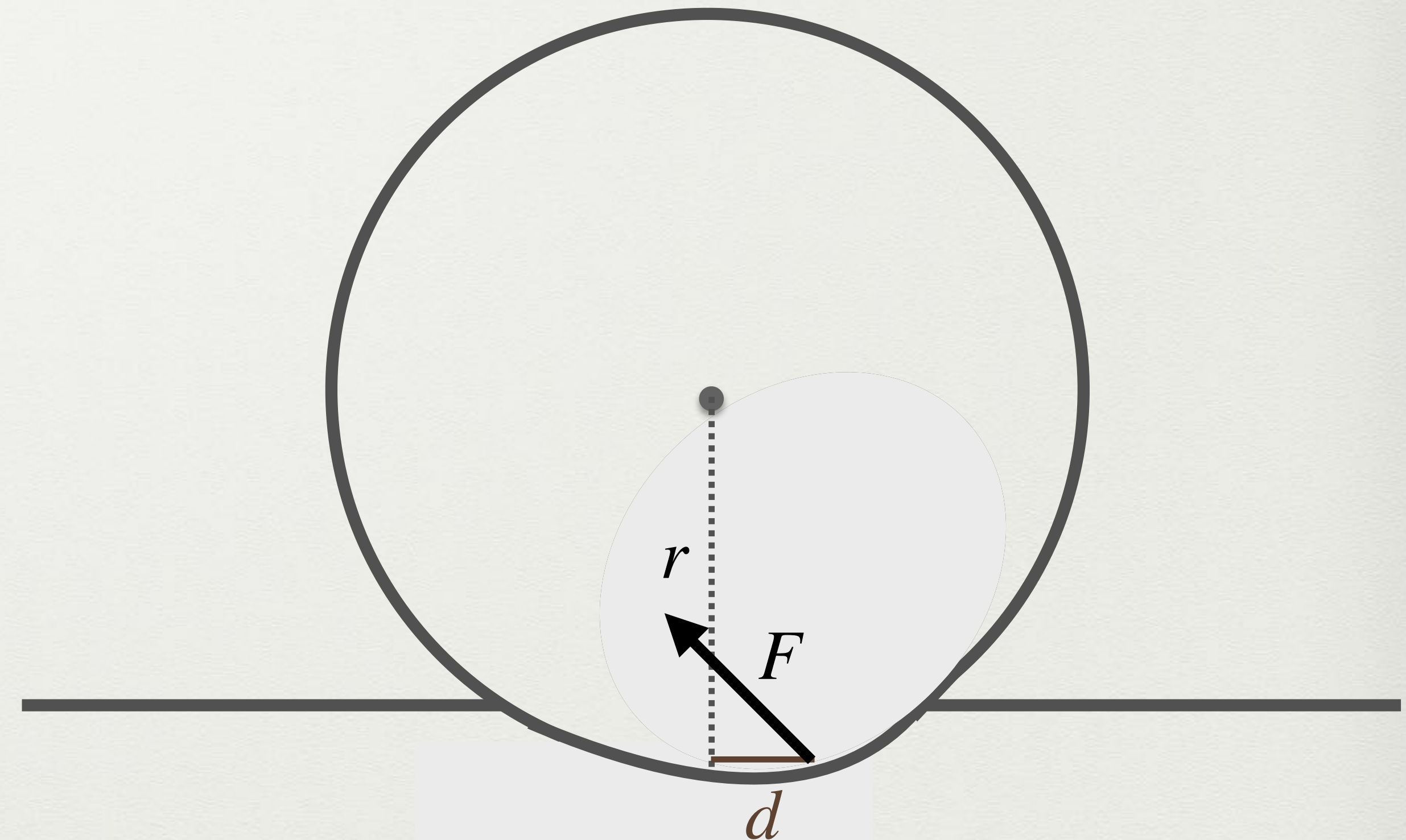


značne prehnaný ilustračný obrázok



# správne pôsobisko sily od podložky

- pôsobisko neleží presne pod stredom kola (celá situácia je vďaka pohybu nesymetrická)
- pri malej deformácii kola aj podložky sa vertikálna vzdialenosť pôsobiska výslednej sily od hmotného stredu kola takmer nelíši od  $r$
- ale aj celkom malá horizontálna vzdialenosť  $d$  pôsobiska od hmotného stredu sa významne líši od nuly, ktorú sme pôvodne predpokladali

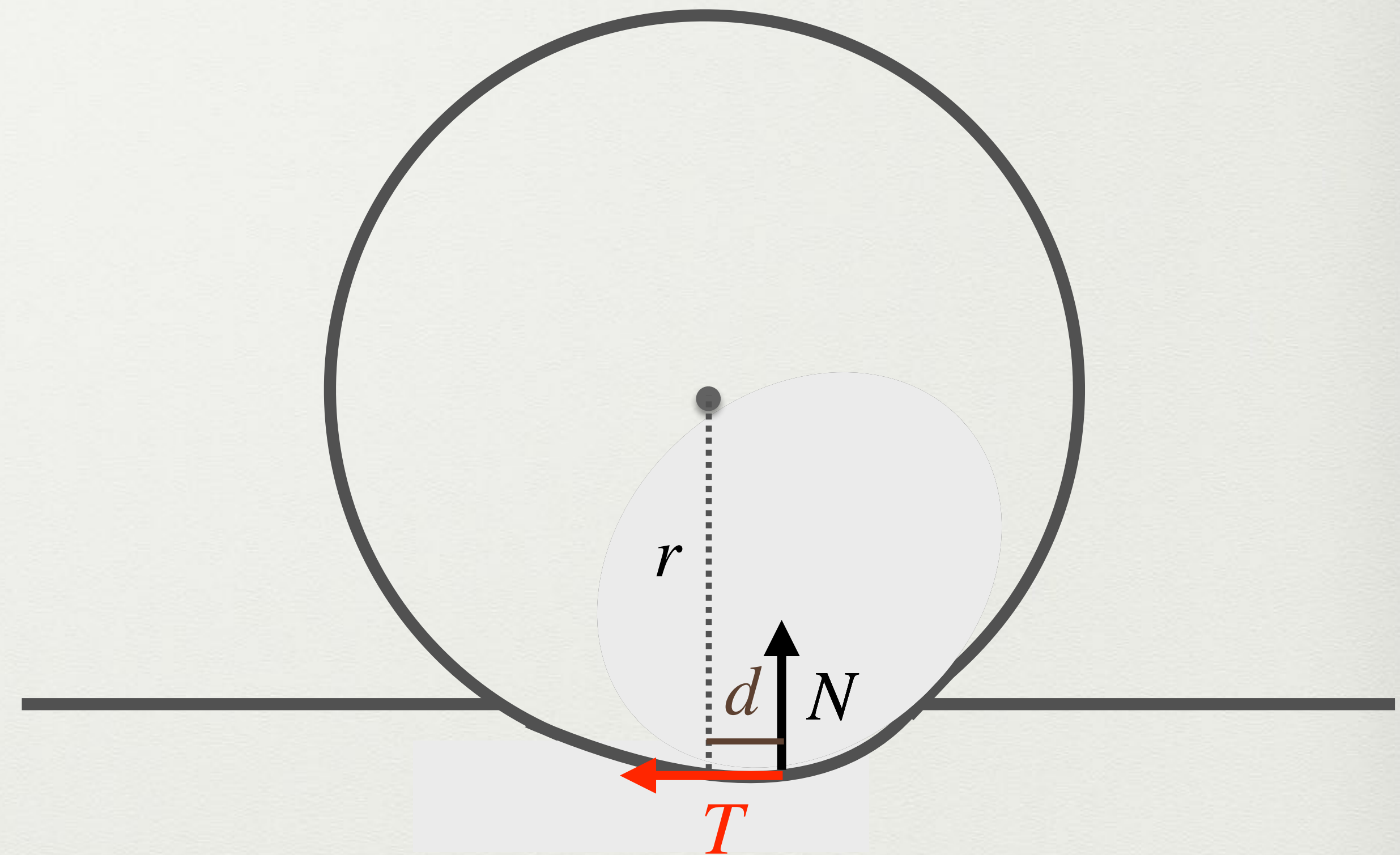


značne prehnaný ilustračný obrázok



# správne momenty síl

- rozložme silu od podložky na zložky  $T$  a  $N$  (tangenciálnu a normálovú)
- sila  $T$  je trecia sila (plus nejaká korekcia od deformačných síl, ktorú budeme zanedbávať)
- moment sily  $T$  vzhľadom k stredu kolesa je  $M_T = -r \cdot T$  (plus zanedbateľná korekcia)
- moment sily  $N$  vzhľadom k stredu kolesa je  $M_N = d \cdot N$  (čo je nezanedbateľná korekcia k pôvodne nulovému momentu tejto sily)
- moment tiažovej sily vzhľadom k stredu kolesa je nulový



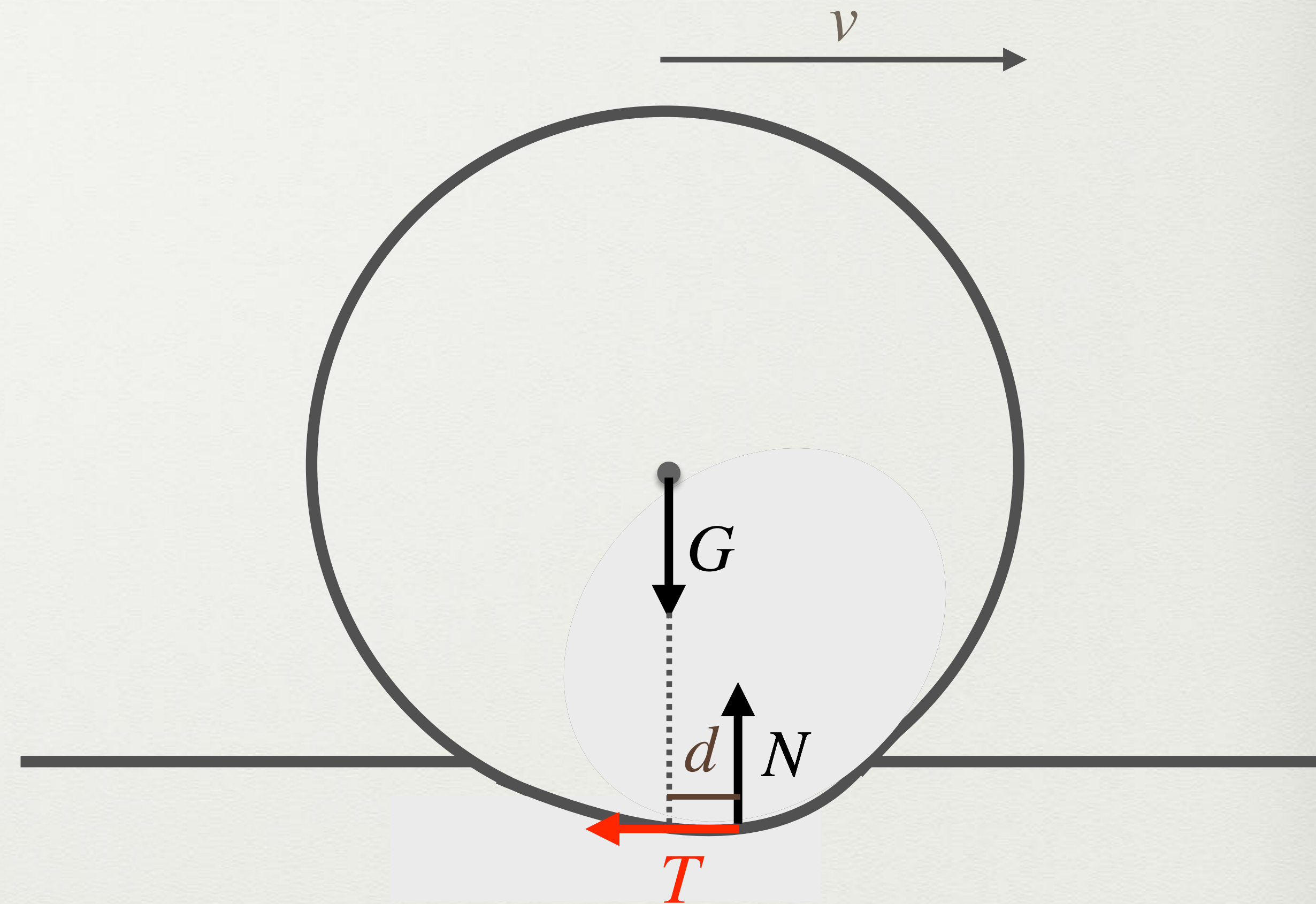
smer sily  $T$  si môžeme zvoliť ako chceme  
ak zvolíme “nesprávne”, dostaneme záporné  $T$



# valivý pohyb ešte raz, tentokrát správne

- horizontálny pohyb  $ma = -T$
- vertikálny (ne)pohyb  $0 = N - G$
- rotačný pohyb  $I\epsilon = -rT + dN$
- valenie  $v = -\omega r \Rightarrow a = -\epsilon r$
- z týchto rovníc ľahko nájdeme
$$a = -d \frac{mgr}{I + mr^2}$$

- dostali sme záporné  $a$ , čiže koleso spomaľuje (statické trenie  $T$  pôsobí naozaj doľava a brzdí pohyb kolesa)



pri správnom použití znamienok znamená záporné  $a$  a kladné  $T$  že smer sily  $T$  sme zvolili “správne”



# poznámka o zanedbávaní

- pri deformácii koleasa sa mení jeho tvar a jeho hustota, tieto zmeny sme však nebrali do úvahy (podobne, ako zmenu ramena sily  $T$  )
- jediná zmena, ktorú sme brali do úvahy, bola zmena  $d$  ramena sily  $N$
- pričom ale nebolo celkom jasné, prečo by práve táto zmena mala byť podstatne väčšia než zmeny, ktoré sme do úvahy nevzali
- a ona v skutočnosti ani nie je rádovo väčšia
- tak prečo sme všetky malé zmeny okrem tejto jednej zanedbali?



# opäť raz Taylorov rad

- malé zmeny zanedbávame v porovnaní s pôvodnými hodnotami, čo sa dá len ak sú pôvodné hodnoty oveľa väčšie ako tie zmeny
- lenže rameno sily  $N$  bolo pôvodne nulové, čo nie je väčšie ako  $d$
- zanedbávanie väčšinou nie je nič iné, než nahradenie Taylorovho radu jeho prvým nenulovým členom (prípadne viacerými členmi)
- Taylorov rad všetkých veličín začínal nenulovým členom, iba rad pre rameno sily  $N$  začínal nulou, preto sme  $d$  zanedbať nemohli (pod Taylorovým radom tu rozumieme rad v nejakom parametri, ktorým by sme vedeli charakterizovať deformáciu kolesa)



# (nepriame) meranie parametra $d$

- uvažujme koleso idúce s nulovým zrýchlením

- horizontálny pohyb  $0 = -T + F$

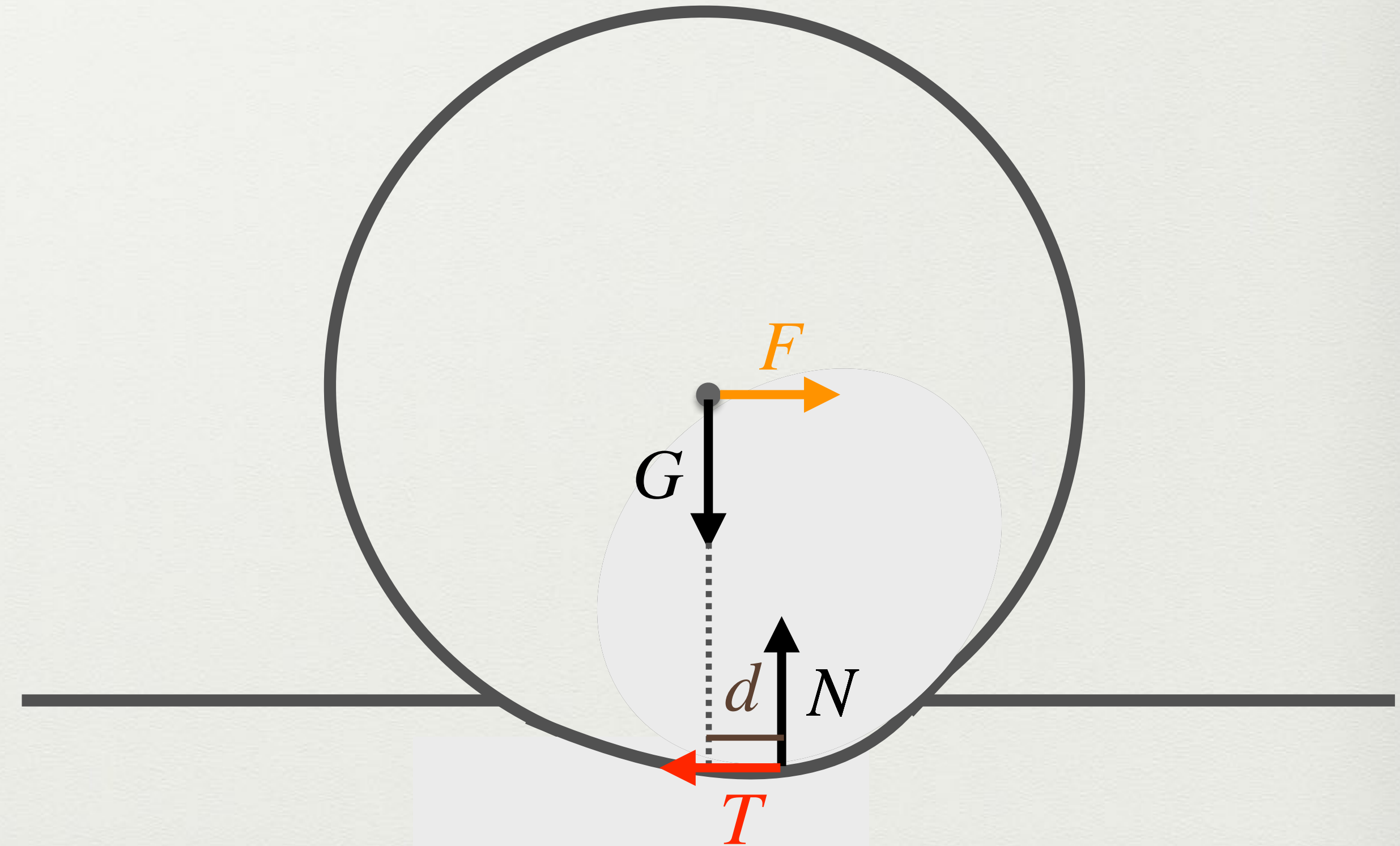
vertikálny (ne)pohyb  $0 = N - G$

rotačný pohyb  $I\epsilon = -rT + dN$

valenie  $v = -\omega r \Rightarrow a = -\epsilon r$

- okamžite dostávame  $F = T = \frac{d}{r} N$

- ak zmeriame  $F$ ,  $N$  a  $r$ , vieme vypočítať  $d$





# koeficient valivého trenia

## moment valivého trenia

ak sa vo fyzikálnych tabuľkách uvádza koeficient valivého trenia, ktorý má rozmer dĺžky, myslí sa ním parameter  $d$  zo vzťahu

$$M = d \cdot N$$

platného pre moment pri rovnomernom valení

napríklad pre oceľové koleso na oceľovej koľajnici tabuľky uvádzajú  $d \approx 0.5 \text{ mm}$

častejšie je však uvádzaný iný (bezrozmerný) koeficient valivého trenia

## сила valivého trenia

ak sa vo fyzikálnych tabuľkách uvádza bezrozmerný koeficient valivého trenia, myslí sa ním parameter  $C$  ( $= d/r$ ) zo vzťahu

$$F = C \cdot N$$

platného pre silu pri rovnomernom valení

napríklad pre oceľové koleso železničného vozňa na oceľovej koľajnici tabuľky uvádzajú

$$C \approx 0.001$$

zatiaľ čo pre koleso auta na betóne či asfalte

$$C \approx 0.01$$



## od čoho závisí parameter $d$

- ak sú koleso aj podložka dostatočne tvrdé, tak ich deformácia je len malá a  $d$  je v podstate konštanta (závislá len od materiálov kolesa a podložky)
- vo všeobecnosti však môže  $d$  závisieť od konkrétneho tvaru deformácie a ten môže závisieť od mnohých vecí: od polomeru kolesa  $r$ , od zaťaženia  $N$ , od rýchlosti  $v$  posuvného pohybu
- ak teda budeme v ďalšom pre jednoduchosť uvažovať prípad  $d = \text{const}$ , budú výsledky pre dostatočne tvrdé materiály pomerne spoľahlivé, zatiaľ čo pre iné materiály budú skôr orientačné (ale aj to je často užitočné)
- presnejšie výsledky sa dosiahnu uvážením závislosti  $d$  od  $r, N, v, \dots$



# niekoľko zaujímavých prípadov

- v priblížení  $d = \text{const}$  teraz prediskutujeme niekoľko zaujímavých javov
- koleso fúrika – k doteraz uvažovaným silám pribudne ešte jedna sila, ktorou tlačíme na os kolesa
- koleso auta – k sile pôsobiacej na os kolesa (tentoraz to bude časť sily odporu prostredia, ktorou je brzdené celé auto, aj s kolesami) pribudne moment sily pôsobiacej na os (práve týmto momentom roztáča motor kolesá)
- obruč v modernej gymnastike – pri vhodných počiatočných podmienkach ide najprv chvíľu od gymnastky, a potom sa k nej vracia



# koleso fúrika

- pribudne jedna sila  $F$ , pôsobiaca v strede

- horizontálny pohyb  $ma = -T + F_x$

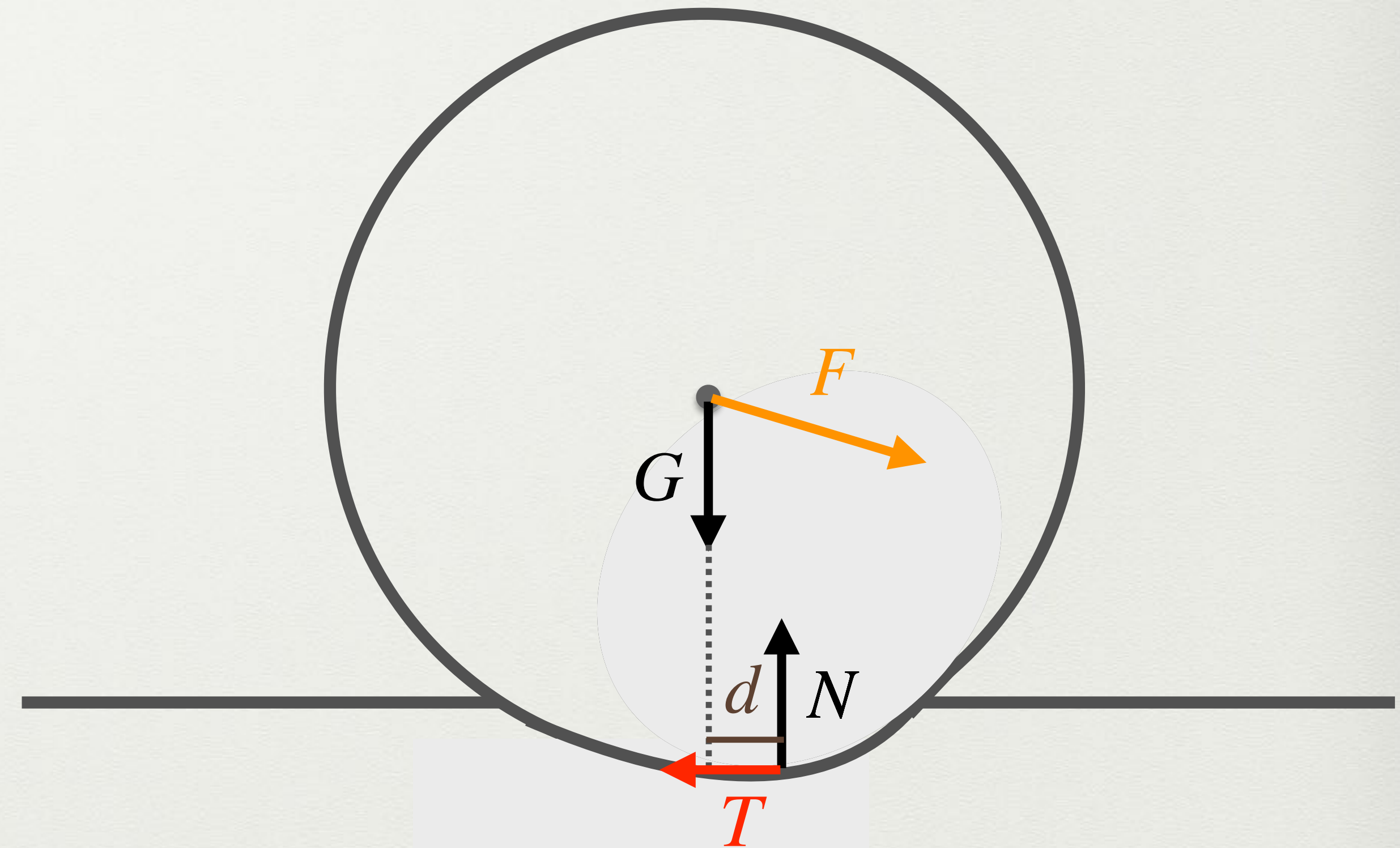
vertikálny (ne)pohyb  $0 = N - G - F_y$

rotačný pohyb  $I\epsilon = -rT + dN$

valenie  $v = -\omega r \Rightarrow a = -\epsilon r$

- z týchto rovníc opäť ľahko nájdeme

$$a = \frac{r F_x - d N}{m r + I/r}$$



úloha: akou silou musíme pôsobiť na fúrik,  
aby išiel rovnomerne priamočiaro?



# koleso železničného vozňa

- rovnaké rovnice ako pre koleso fúrika dostaneme aj pre koleso vozňa táhaného koňom alebo lokomotívou
- sila  $F_x$  je v takom prípade (približne) štvrtina ťažnej sily a sila  $F_y$  je (približne) štvrtina tiaže nákladu
- z výsledku pre koleso fúrika vidíme, že sa pohybuje s nulovým zrýchlením, ak
- najlepšie sú kolesá s malým  $d$  a veľkým  $r$
- najmenšie  $d$  máme pri tvrdých (oceľových) kolesách a tvrdých (oceľových) cestách
- lenže oceľové cesty by boli šialene drahé riešenie: používame mimoriadne úzke oceľové cesty, ktorým hovoríme koľajnice
- pozoruhodný experimentálny fakt – závislosť koeficientu valivého trenia  $d$  od normálovej sily je v prípade ocele na oceli prekvapujúca:  $d(N)$  je klesajúca funkcia
- skvelý dôsledok: na železnici je ťahanie plne naložených vozňov účinnejšie ako prázdnych (treba menej ťažnej sily na tonu záťaže)

$$F_x = \frac{d}{r} N$$



# koleso auta

- pribudne ešte moment sily  $M$ , ktorým na os kolesa pôsobí motor

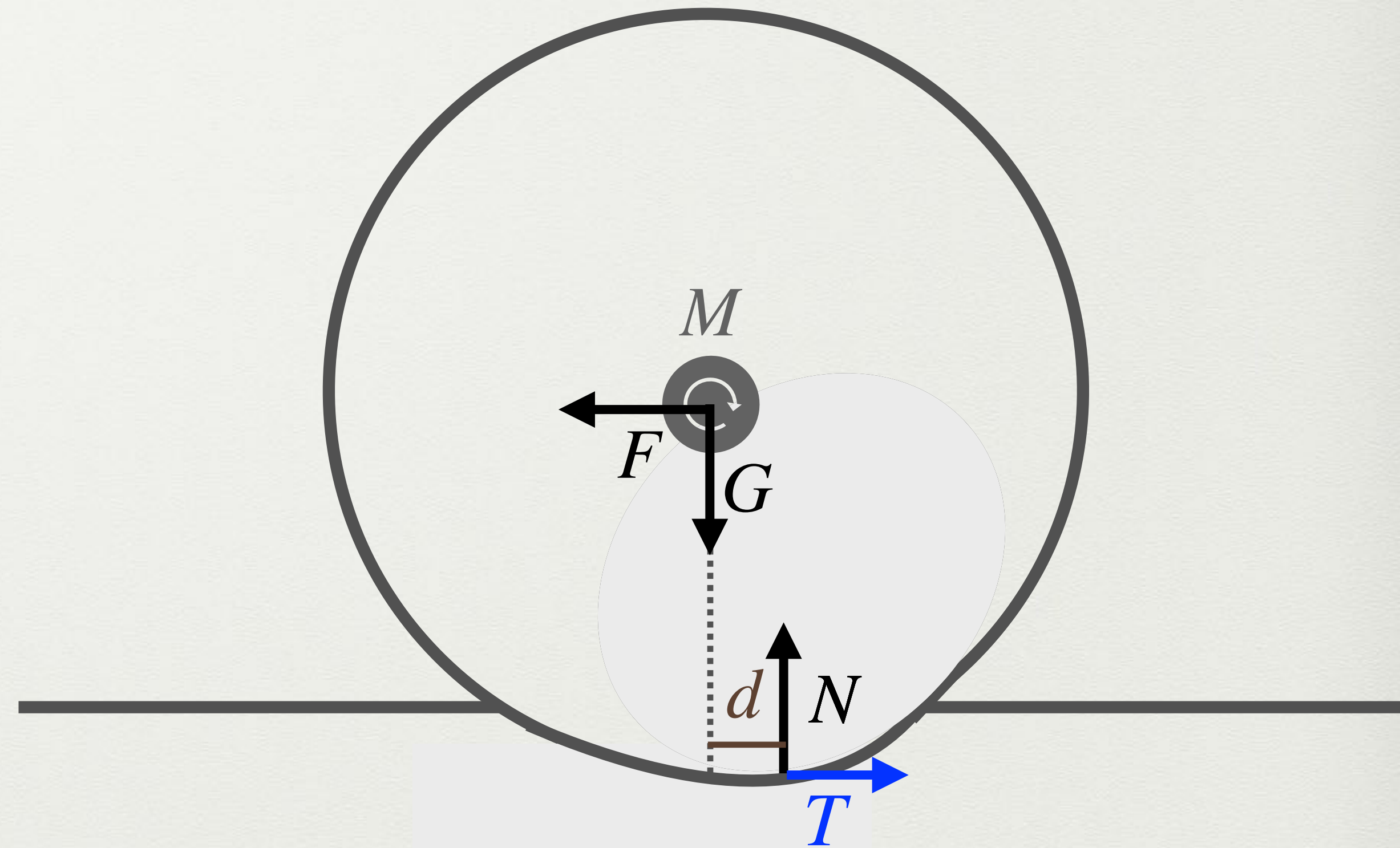
- horizontálny pohyb  $ma = T - F$

vertikálny (ne)pohyb  $0 = N - G$

rotačný pohyb  $I\epsilon = rT + dN - M$

valenie  $v = -\omega r \Rightarrow a = -\epsilon r$

- z rovníc dostaneme  $a = \frac{M - rF - dG}{mr + I/r}$



sila  $F$  pochádza od odporu prostredia

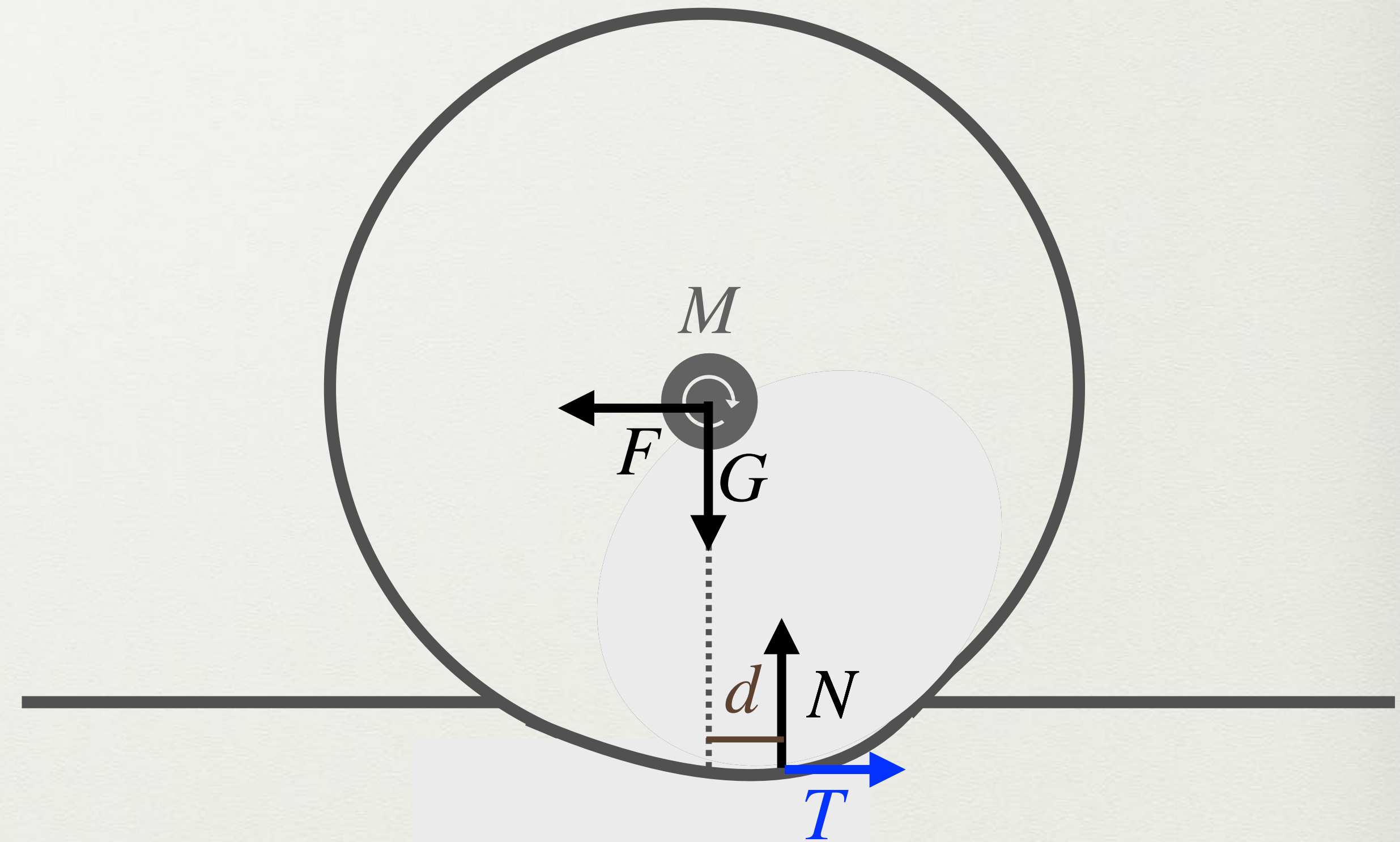


# aká sila udržiava auto v pohybe?

- aby sa koleso pohybovalo rovnomerne ( $a = 0$ ), moment sily pôsobiaci na jeho os musí mať veľkosť

$$M = rF + dG$$

- je teda správne povedať, že pri rovnomernom pohybe je auto poháňané týmto momentom
- ale tak otázka nestála  
pýtali sme sa na silu, nie na moment sily
- je celkom zjavné, aj keď možno prekvapivé, že keďže v hre je už len jedna horizontálna sila, tak



auto je udržiavané v pohybe trecou silou, konkrétne silou statického trenia



# šmyk koleasa

- uvažujme koleso pri štarte (nulová rýchlosť, čiže aj nulový odpor vzduchu) a vyjadrieme silu  $T$
- pri brzdení je moment sily  $M$  súčtom dvoch momentov, od motora a od brzd

$$T = \frac{M - dG}{r + I/mr}$$

- z podmienky  $|T| \leq f_s N$  dostaneme podmienku

$$M \leq f_s G \left( r + \frac{I}{mr} \right) + dG$$

- akonáhle je moment  $M$  väčší ako pravá strana, dôjde k prešmykovaniu koleasa
- moment sily  $M$  kontrolujeme v aute plynovým pedálom; ak to preženieme, kolesá prešmykujú

- pri pohybe nenulovou rýchlosťou dostaneme

$$T = F + \frac{M + rF - dG}{r + I/mr}$$

- z podmienky  $|T| \leq f_s N$  dostaneme podmienku

$$\left| F + \frac{M + rF - dG}{r + I/mr} \right| \leq f_s G$$

ktorá je narušená pri príliš veľkom  $|M|$

- moment sily  $M$  kontrolujeme v tomto prípade najmä brzdovým pedálom; ak na tento pedál príliš dupneme, dostaneme šmyk



# vracajúca sa obruč

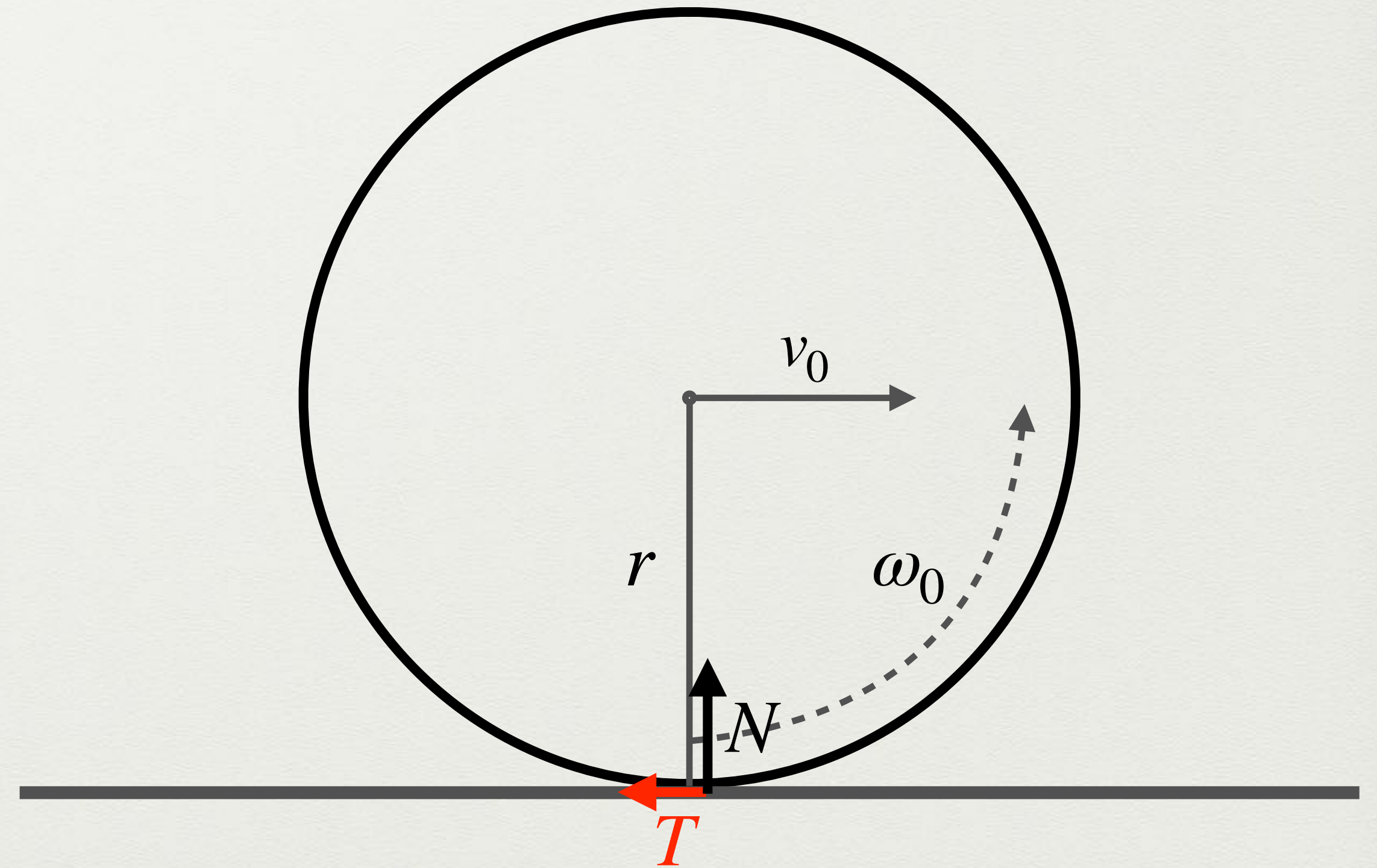
jednoduchý trik často používaný v modernej gymnastike





# kedy sa začne vracat'?

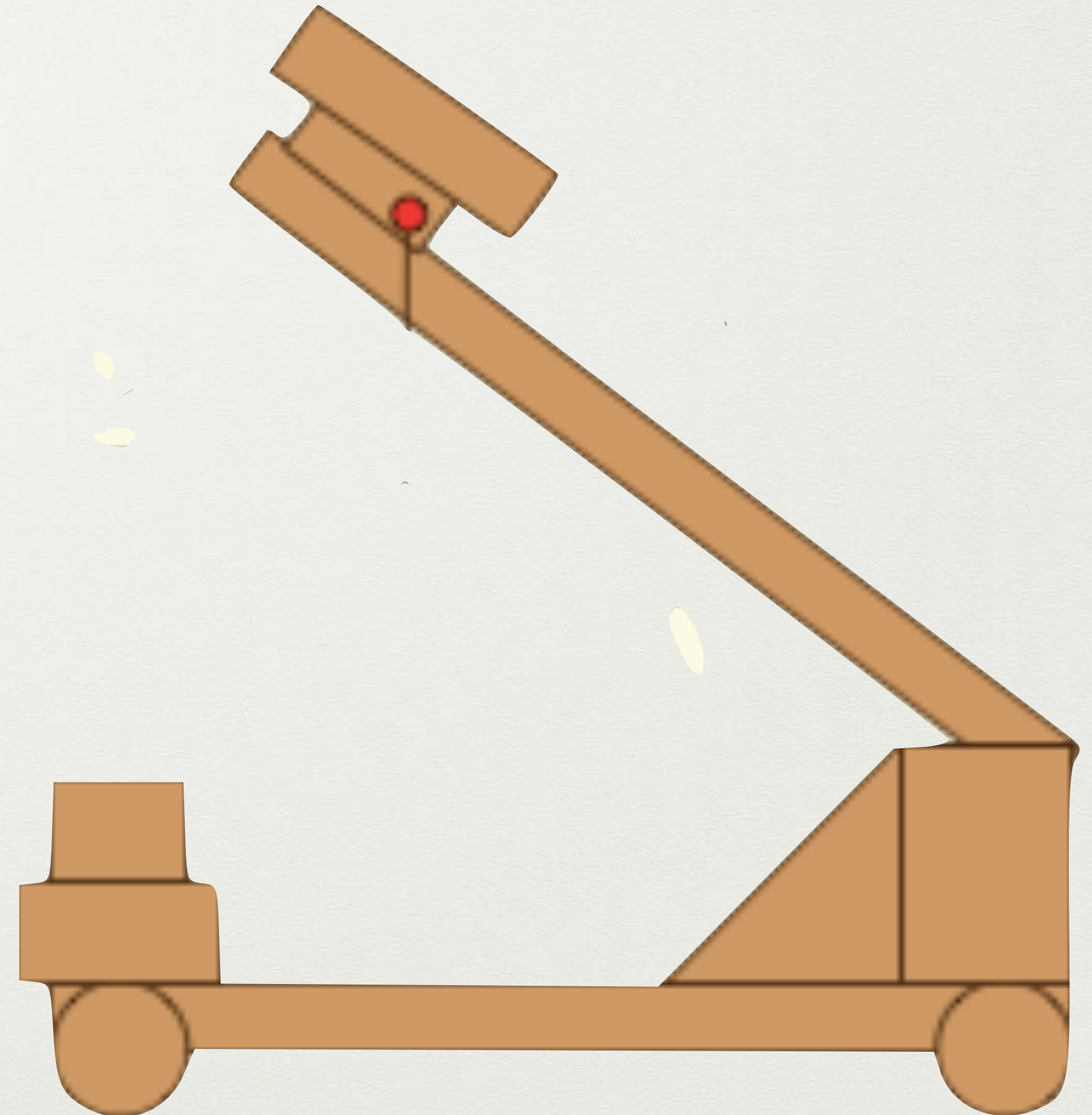
- počiatočná rýchlosť a uhlová rýchlosť nespĺňajú podmienku valenia:  $v_0 \neq -\omega_0 r$ , trenie je šmykové
- šmykové trenie  $T = -f_k N$   
horizontálny pohyb  $ma = T$   
vertikálny (ne)pohyb  $0 = N - G$   
rotačný pohyb  $mr^2 \epsilon = rT + dN$
- $v(t) = v_0 + a \cdot t = v_0 - f_k g t$   
 $\omega(t) = \omega_0 + \epsilon \cdot t = \omega_0 - \frac{f_k r - d}{r^2} g t$
- prešmykovanie prestane, keď  $v(t) = -r \omega(t)$   
v čase  $t = \frac{1}{g} \frac{v_0 + \omega_0 r}{2f_k - d/r}$  sa obruč začne valiť späť





# zaujímavosť na záver

- 1996 Ing. Mastihuba zostrojil svoj model, ktorý považuje za nový typ pohonu
- 1997 v negatívnom posudku od SAV neznámy autor tvrdí, že pozorovaný pohyb nemôže nastať, t.j. nenastáva (čo vedie Ing. Mastihubu k záveru, že objavil *anomáliu dynamiky*)
- 1998-2005 Ing. Mastihuba konzultuje svoj objav s viacerými odborníkmi
- nikto objav neuznáva, a zároveň mu nikto nevie uspokojivo vysvetliť, prečo sa zariadenie chová tak, ako sa chová





# o čo ide?

- toto jednoduché zariadenie sa hýbe v smere opačnom, než nám nahovára (nesprávna) fyzikálna intuícia
- ak zhodíme páku (so žltou čiapočkou), ktorým smerom sa premiestni sa vozík?
- ktorá sila spôsobila pohyb vozíka?
- statické trenie (lebo v horizontálnom smere nie je nič iné k dispozícii)
- ale fakt, že statické trenie je schopné hýbať vecami, sa akosi prieči intuícii

