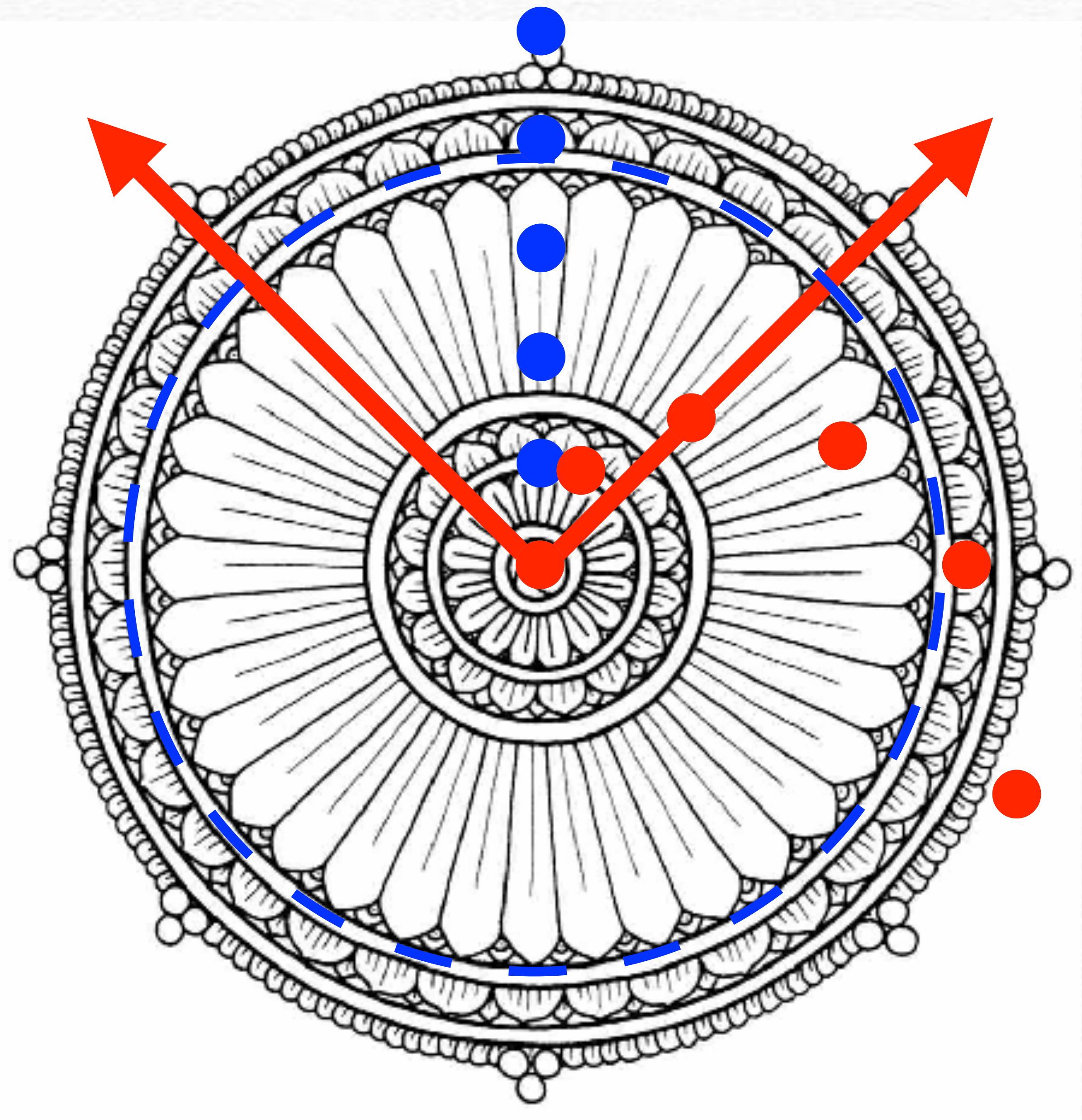
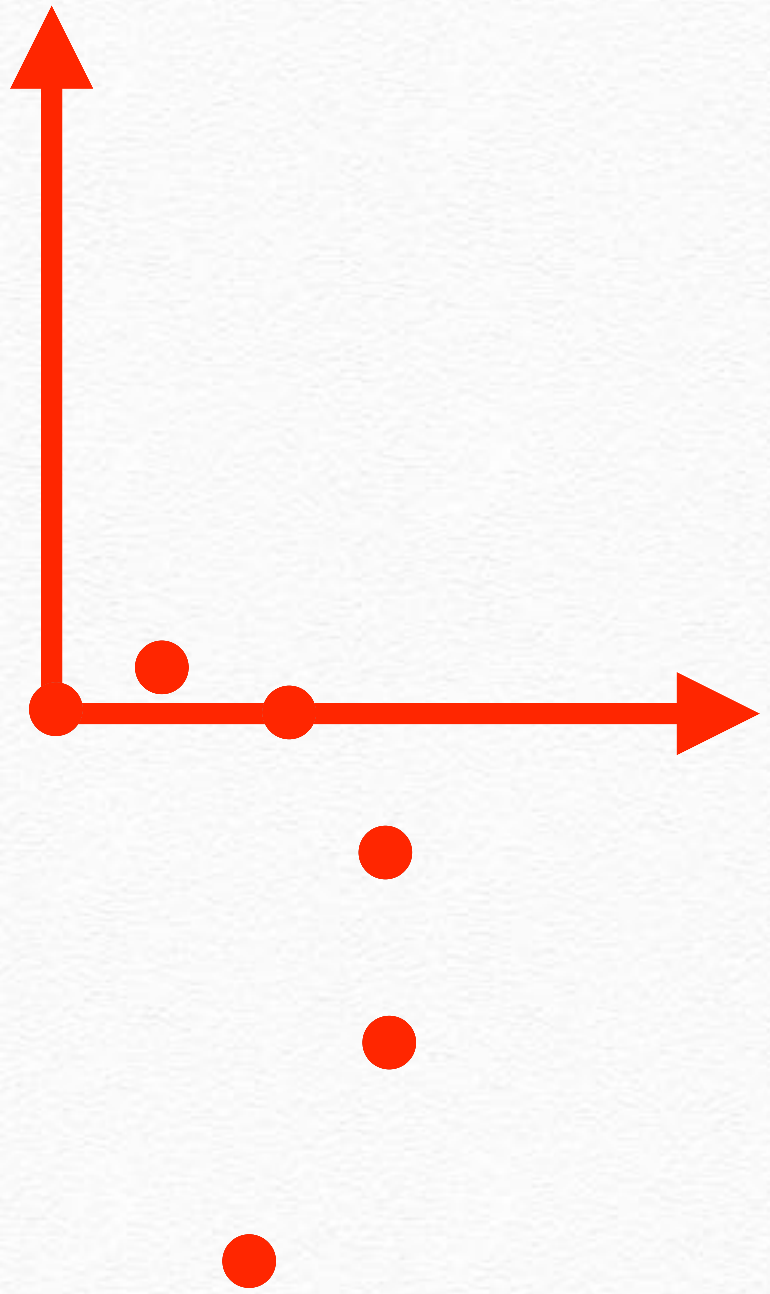
rotujúce neinerciálne sústavy

odstredivá sila a Coriolisova sila

mechanika 27

in the previous episode





vo vzťažnej sústave “kolotoč” pôsobí okrem odstredivej aj nejaká ďalšia fiktívna sila

fiktívne sily v rotujúcej sústave

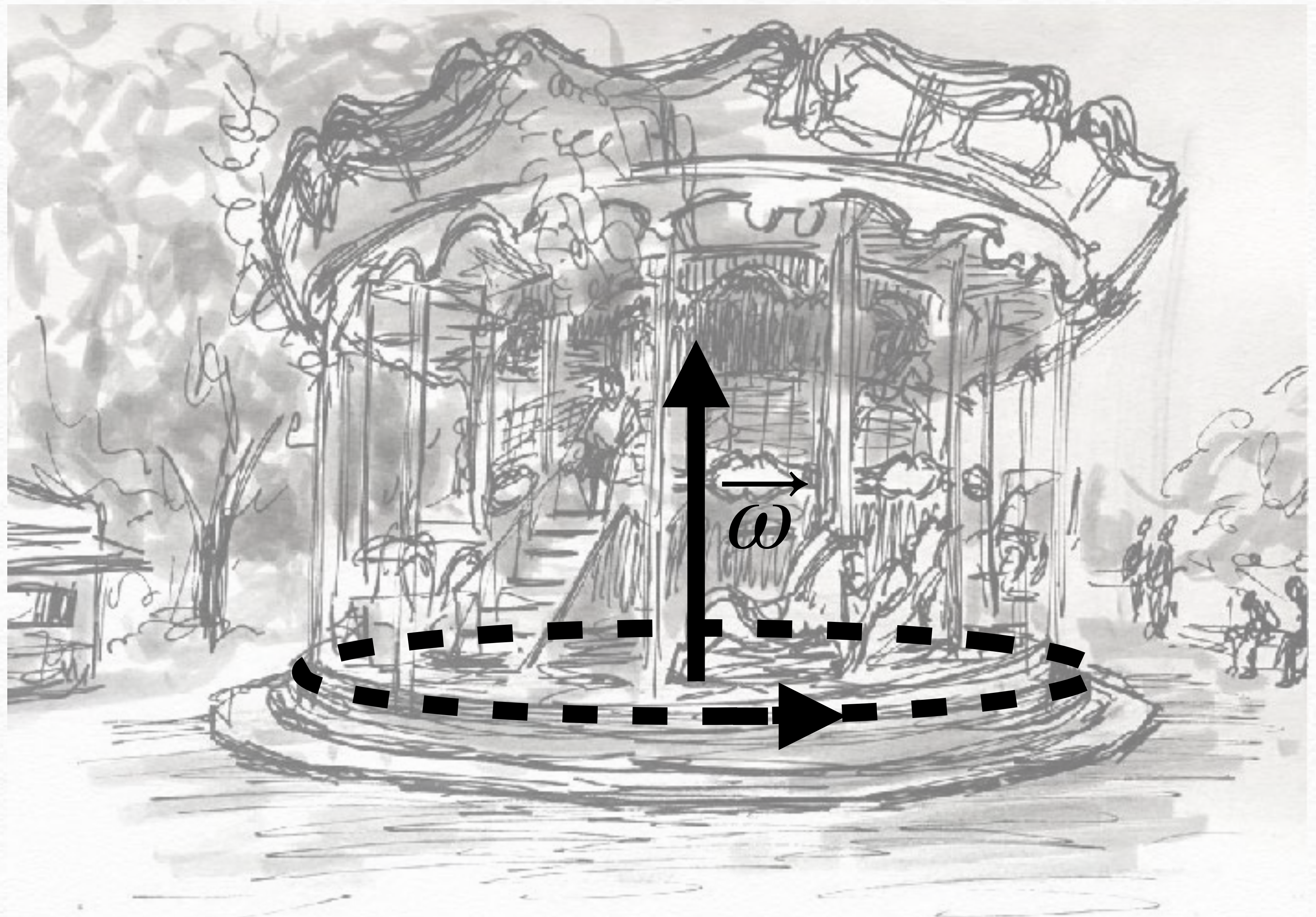
- sú tri:
  odstredivá (pôsobí všade okrem osi rotácie)
  Coriolisova (to je tá, ktorej prejav sme videli na obrázku)
  Eulerova (pôsobí len ak sa mení uhlová rýchlosť rotácie)
- odstredivú sme už mali, na ďalšie dve sa pozrieme teraz
- odvodenie bude formálnejšie (jednoduchšie sa to nahliadnuť nedá) ale výhodou tohto odvodenia bude priezračne jasný tvar všetkých troch fiktívnych síl v rotujúcich neinerciálnych sústavách

vektor uhlovej rýchlosti

- rotáciu sústavy *S* vzhľadom k sústave *S'* budeme opisovať vektorom uhlovej rýchlosti

- <u>definícia vektora uhlovej rýchlosti</u> $\overrightarrow{\omega}$
  – smer je v smere osi rotácie
  – veľkosť je ω
  – orientácia: pravidlo pravej ruky
  (ak zahnuté prsty pravej ruky ukazujú smer rotácie, potom je palec v smere $\overrightarrow{\omega}$)

- na prvý pohľad vyzerá opis uhlovej rýchlosti pomocou vektora dosť umelo a krkolomne, ale ukáže sa, že je to veľmi užitočný opis

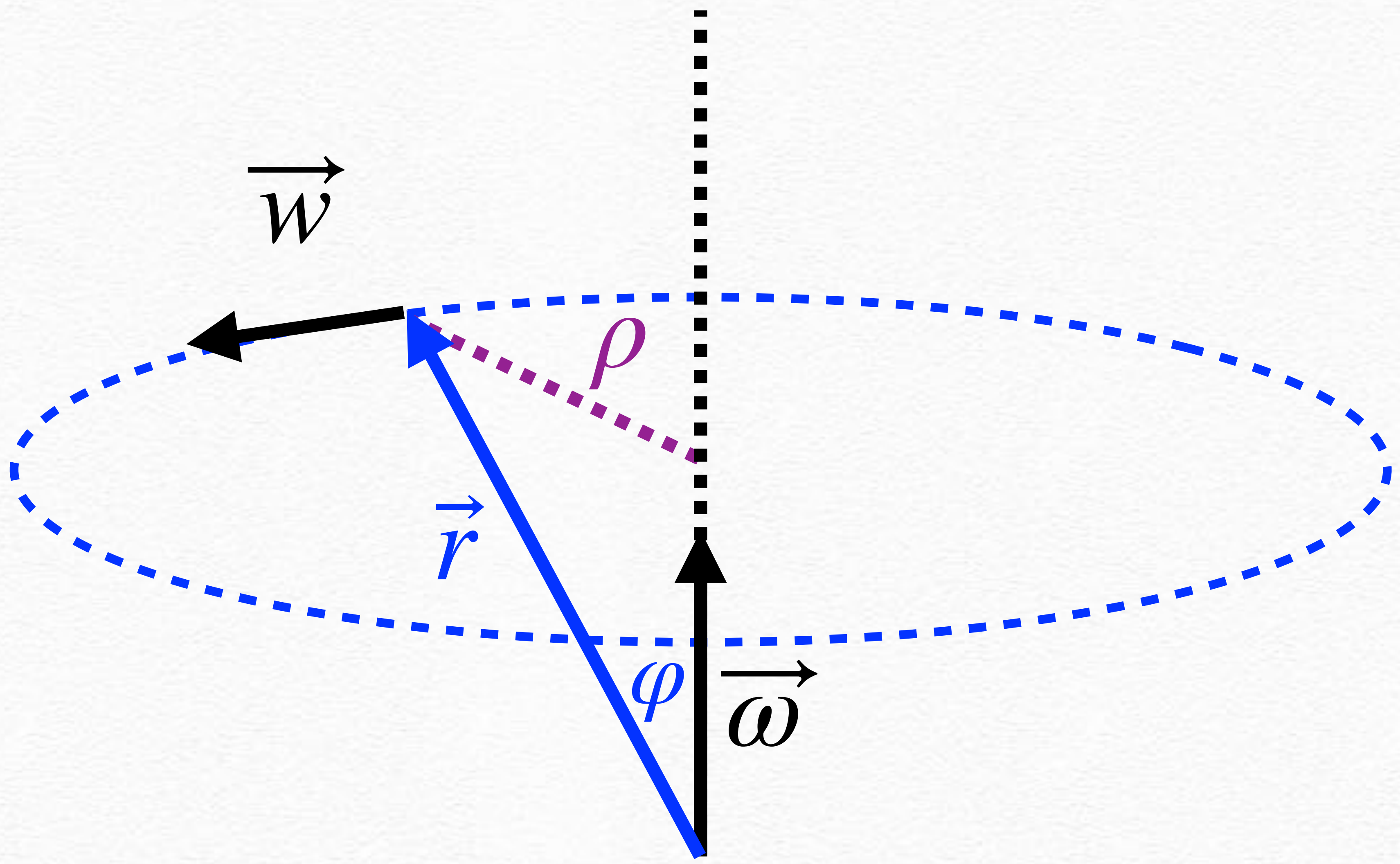


je užitočné (ale nie nevyhnutné) vybrať súradnicovú os *z* tak, aby vektor uhlovej rýchlosti ležal v tejto osi

rýchlosť rotácie vyjadrená cez $\vec{\omega}$

- body stojace v sústave S sa vzhľadom k sústave S' pohybujú po kružniciach
- veľkosť rýchlosti rotácie je $\omega\,\rho$
  kde ρ je polomer príslušnej kružnice
- toto sa dá napísať aj ako $\omega\, r\, \sin\varphi$
  kde r je velkosť polohového vektora príslušného bodu a φ je uhol medzi polohovým vektorom a vektorom $\vec{\omega}$
- ľahko sa nahliadne (urobte to, treba pritom trochu cvičiť pravou rukou)

$$\boxed{\vec{w} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

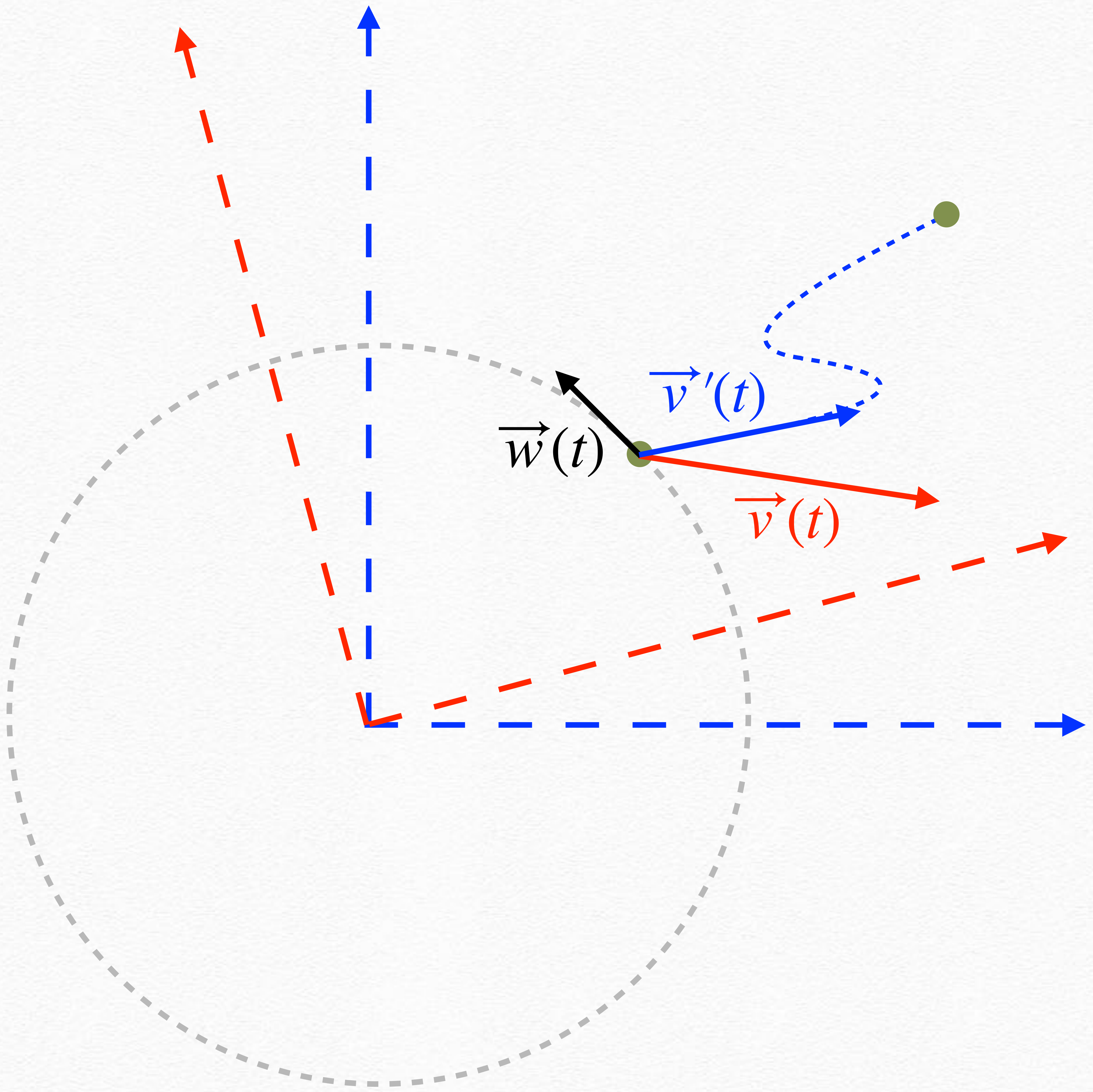


$$w = \omega\,\rho = \omega\, r\, \sin\varphi$$

rôzne rýchlosti v rôznych sústavách

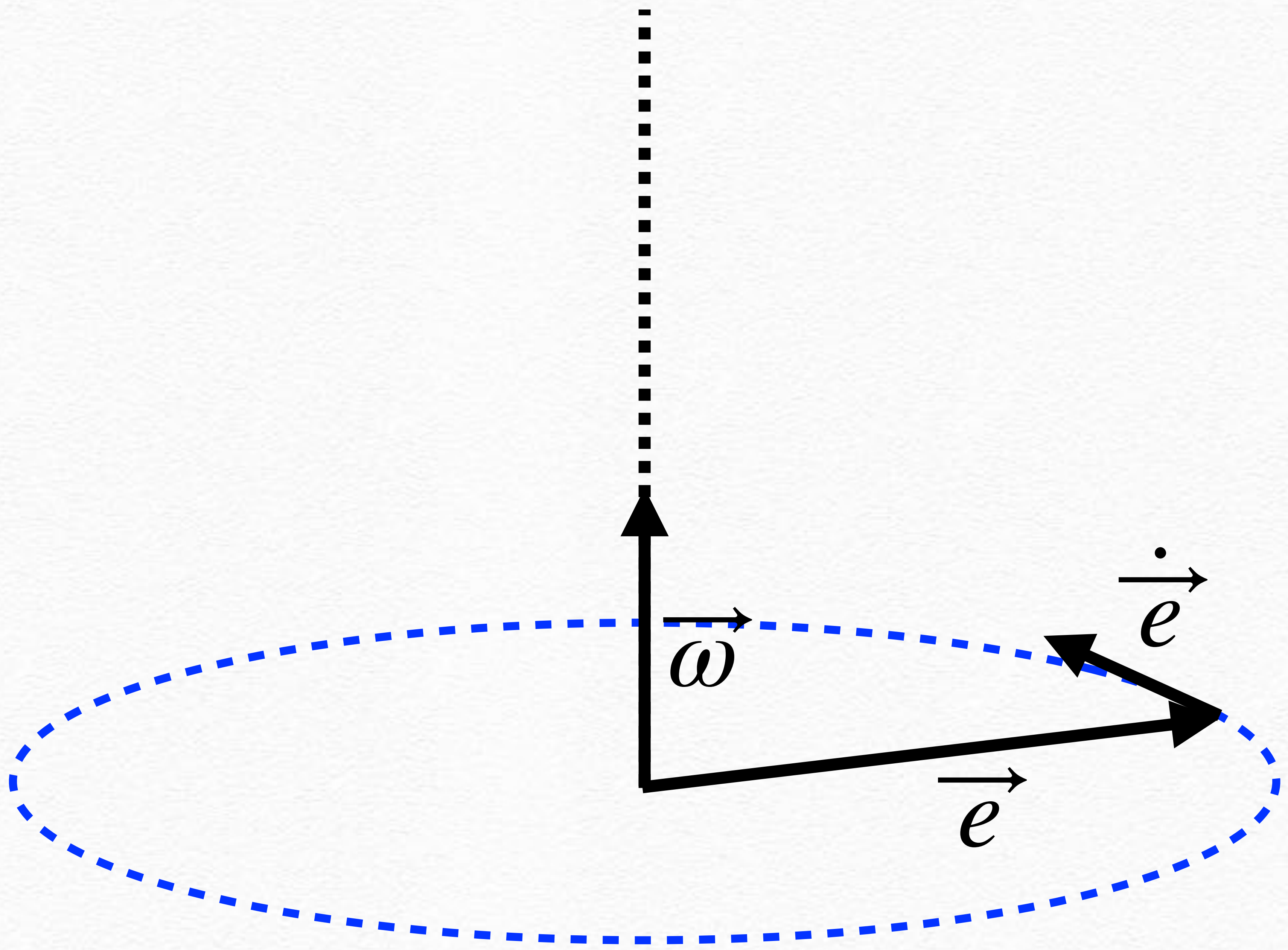
- rýchlosť telesa vzhľadom k sústavám *S* a *S'* je rôzna
- tieto dve rýchlosti sa líšia o rýchlosť $\vec{w}(t)$, ktorou sa (stojaci) bod sústavy *S* (v ktorom sa v čase *t* nachádza naše teleso) pohybuje (rotuje) vzhľadom k sústave *S'*
- rýchlosť $\vec{v}\,'(t)$ telesa vzhľadom k sústave *S'* je súčtom rýchlosti $\vec{v}(t)$ vzhľadom k súst. *S* a relatívnej lokálnej rýchlosti $\vec{w}(t)$

$$\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) + \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$$



to isté inak (príprava)

- vzťah medzi $\vec{v}\,'(t)$ a $\vec{v}(t)$ je natoľko dôležitý, že ho radšej odvodíme ešte raz
- ako prípravu k tomuto odvodeniu nájdeme rýchlosť zmeny bázových vektorov sústavy ***S*** z hľadiska sústavy ***S'***
- veľkosť rýchlosti zmeny $\vec{e}$ je $\omega\,|\,\vec{e}\,| = \omega$
- smer $\dot{\vec{e}}$ je kolmý na $\vec{e}$ aj na $\vec{\omega}$
- orientácia je taká, že $\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}$



to isté inak (dokončenie)

- ľubovoľný vektor $\vec{u}(t)$ rozložíme jednak do bázových vektorov sústavy ***S'*** (ktoré budeme považovať za časovo nemenné) a jednak do bázových vektorov sústavy ***S*** (ktoré sa menia s časom)

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} c'_i(t)\,\vec{e}\,'_i = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\vec{e}_i(t)$$

- zderivujeme podľa času a vo výslednom vzťahu identifikujeme (toto je netriviálne) rýchlosti zmeny vektora $\vec{u}(t)$ vzhľadom k vzťažným sústavám ***S'*** a ***S***

- $$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \dot{c}'_i(t)\,\vec{e}\,'_i}_{\text{rýchlosť v } S'} = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i(t)\,\vec{e}_i(t)}_{\text{rýchlosť v } S} + \underbrace{c_i(t)\,\dot{\vec{e}}_i(t)}_{\text{zvyšok}}$$

- premyslite si, že označené sumy sú naozaj rýchlosti zmeny $\vec{u}(t)$ vzhľadom k ***S'*** a ***S***

- zvyšok $= \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\vec{\omega}\times\vec{e}_i = \vec{\omega}\times\vec{u}(t)$

- $\boxed{\text{rýchlosť v } S' = \text{rýchlosť v } S + \vec{\omega}\times\vec{u}(t)}$

a teraz zrýchlenia

- $\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i'(t)\,\vec{e}\,'_i = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\vec{e}_i(t)$

- $\dot{\vec{r}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i'(t)\,\vec{e}\,'_i = \sum_{i=1}^{3} \dot{c}_i(t)\,\vec{e}_i(t) + c_i(t)\,\dot{\vec{e}}_i(t)$

- $\ddot{\vec{r}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \ddot{c}_i'(t)\,\vec{e}\,'_i = \sum_{i=1}^{3} \ddot{c}_i(t)\,\vec{e}_i(t) + 2\,\dot{c}_i(t)\,\dot{\vec{e}}_i(t) + c_i(t)\,\ddot{\vec{e}}_i(t)$

- $\ddot{\vec{e}}_i = \frac{d}{dt}\dot{\vec{e}}_i = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{e}_i) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_i + \vec{\omega} \times \dot{\vec{e}}_i = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{e}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i)$

pohybová rovnica v rotujúcej sústave

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = m\ddot{\vec{r}}'(t) - m\vec{\omega}(t) \times (\, \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)\,) - 2m\vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t) - m\dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{r}(t)$$

súčet reálnych síl

odstredivá fiktívna sila (aj s tým mínus)

Coriolisova fiktívna sila (aj s tým mínus)

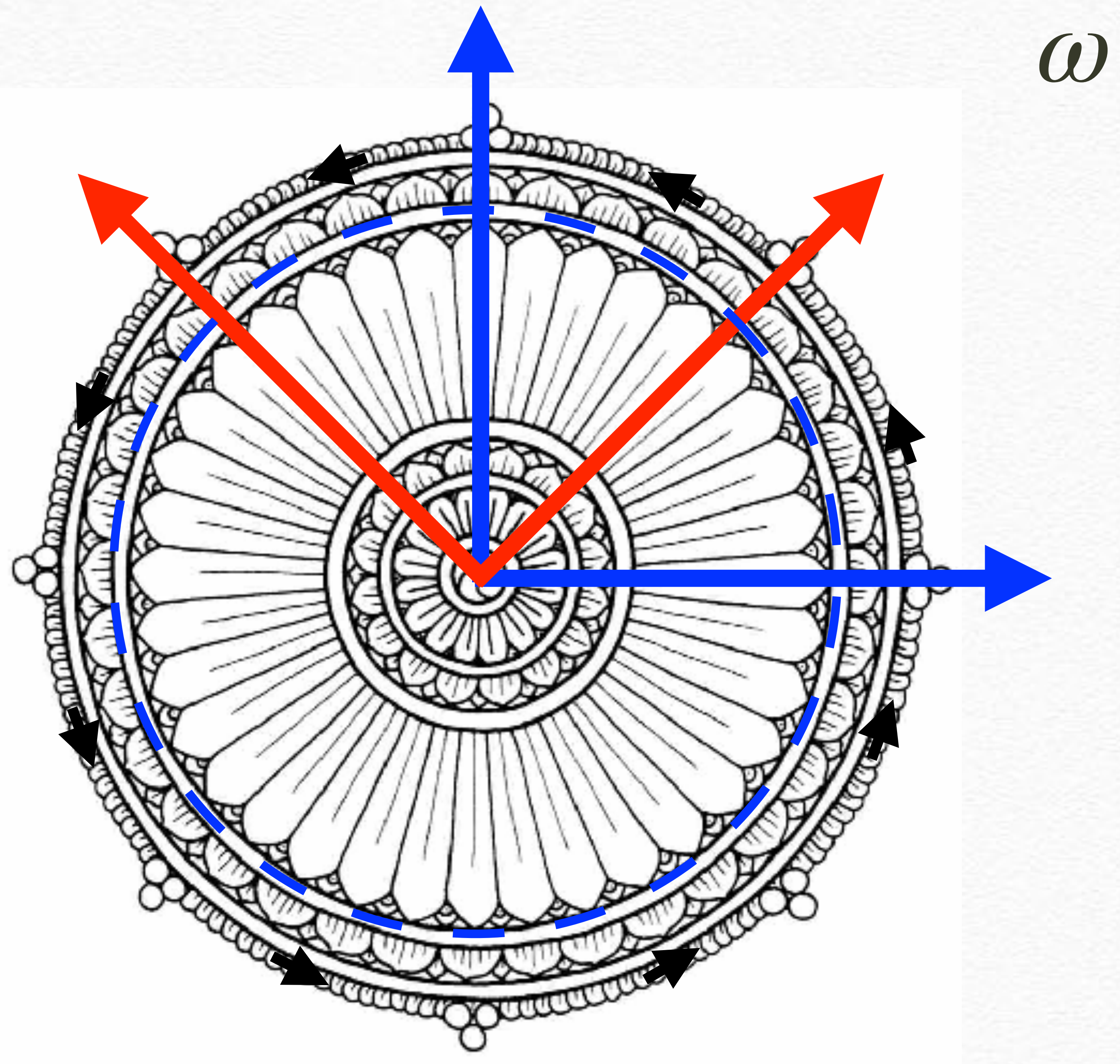
Eulerova fiktívna sila (aj s tým mínus)

- ukážte, že v rovine
  odstredivá sila smeruje od stredu otáčania a jej veľkosť je $m\omega^2 r$

- ukážte, že v priestore
  odstredivá sila smeruje od osi otáčania a jej veľkosť je $m\omega^2\rho$
  kde ρ je veľkosť priemetu polohového vektora do roviny kolmej na $\vec{\omega}$

hviezda, kolotoč a Coriolisova sila

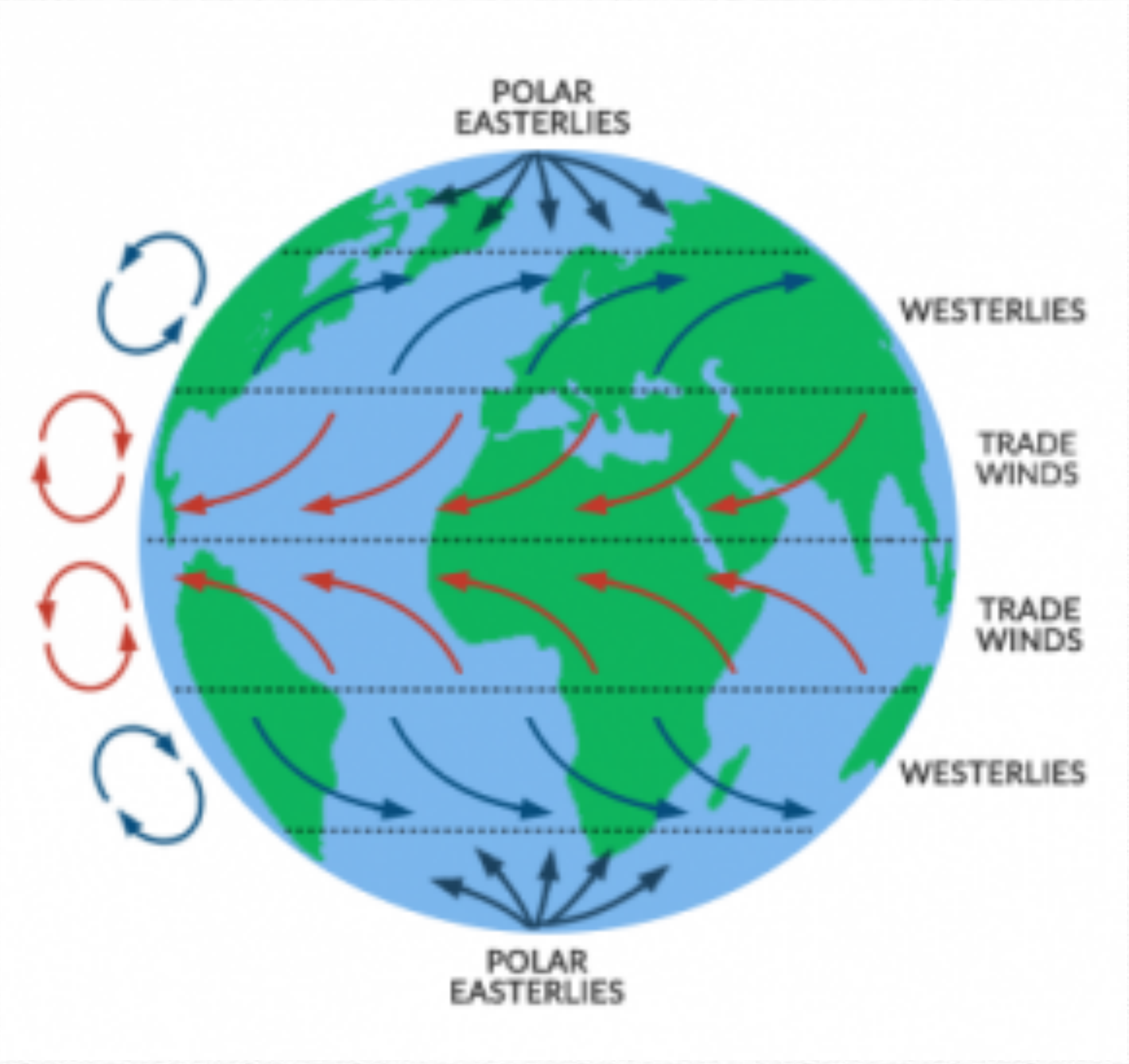
- vráťme sa príkladu, v ktorom samotná odstredivá sila nezachránila zákon sily
- aké sú smer a veľkosť Coriolisovej sily pôsobiacej na hviezdu vo vzťažnej sústvave rotujúci kolotoč?
- aká je Eulerova sila pôsobiaca na hviezdu v prípade, že sa uhlová rýchlosť kolotoča nemení?
- ak započítame všetky fiktívne sily, platí zákon sily?



na hviezdu pôsobí prakticky nulová reálna sila (je od všetkých ďaleko), okrem nej odstredivá fiktívna sila a v opačnom smere dvakrát väčšia Coriolisova sila; zákon sily je perfektne splnený

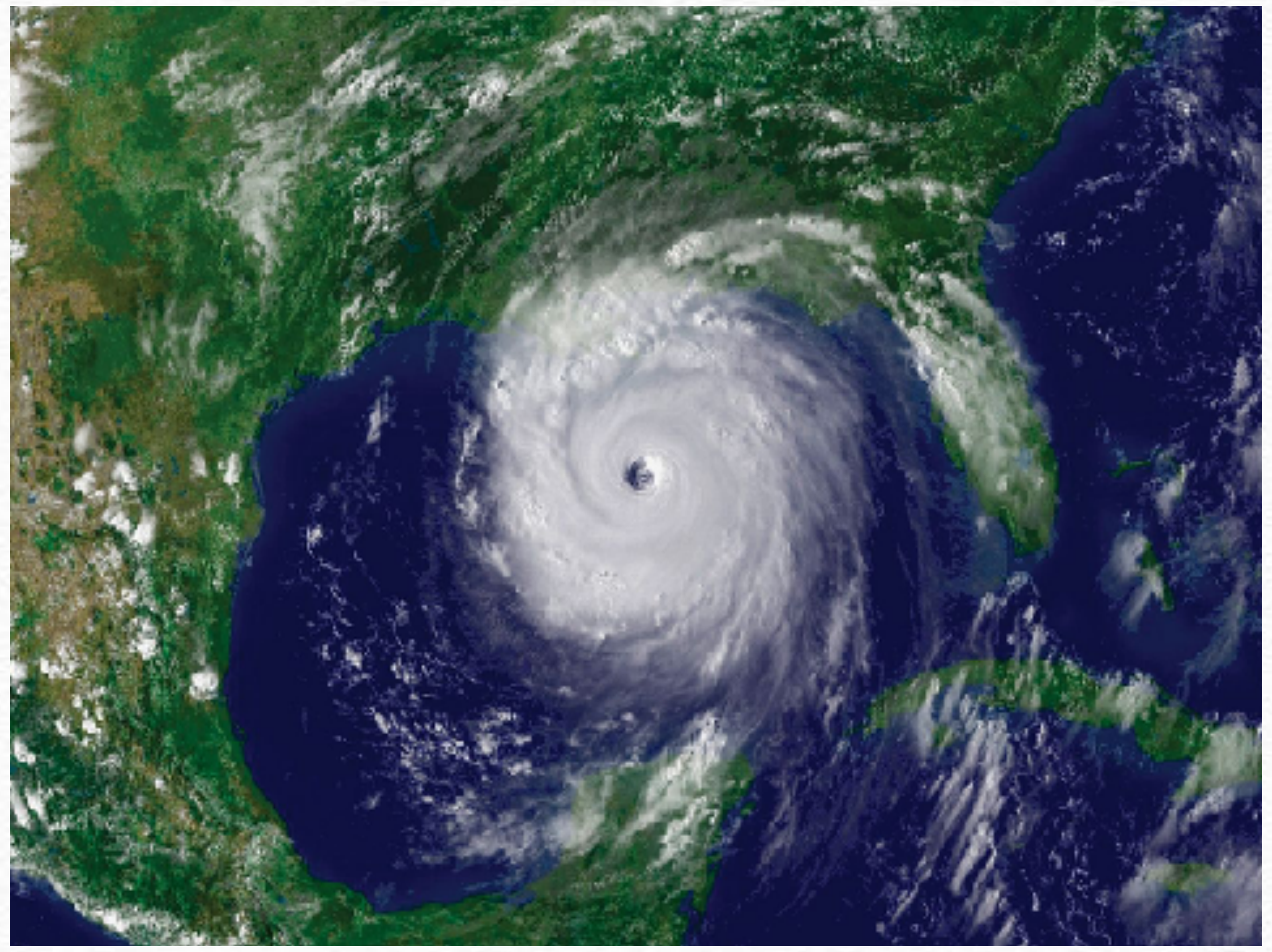
Krištof Kolumbus a Coriolisova sila

- kvôli nerovnomernému ohrievaniu zemského povrchu prúdia na Zemi severo-južné vetry (veľmi zhruba od obratníkov k rovníku a od pólov a obratníkov k polárnym kruhom)
- tieto vetry sú na rotujúcej Zemi stáčané Coriolisovou silou tak, ako je nakreslené na obrázku
- preverte, že tie smery sú správne
- len vďaka týmto vetrom doplávali Kolumbove plachetnice do Ameriky



víry, hurikány a Coriolisova sila

- ako vznikajú vodné či vzdušné víry?
- napríklad takto: ak tekutina prúdi zo všetkých strán do jedného bodu, Coriolisova sila stáča prúdenie na severnej pologuli doprava a na južnej pologuli doľava
- ak je vír dôsledkom len Coriolisovej sily, potom sa na severnej pologuli točí v smere proti smeru chodu hodinových ručičiek (prečo?) a na južnej pologuli zas v smere chodu hodinových ručičiek
- presne také chovanie pozorujeme pri hurikánoch
- pri vodných víroch nie je Coriolisova sila rozhodujúca



milý rovníkový podvod

- bežná turistická atrakcia na rovníku: na severnej a južnej pologuli rotuje vodný vír opačnými smermi
- je to bohužiaľ podvod
- smer rotácie víru je v skutočnosti daný počiatočnými podmienkami a Coriolisova sila je príliš slabá na to, aby tento smer zmenila
- rôzny smer rotácie víru sa dá ľahko dosiahnuť aj doma v umývadle (skúste to)

dôležité upozornenie: táto úloha býva často na skúške

jednoduchá úloha na záver

- predstavte si auto idúce v kruhovej zákrute, ktorú môžeme s dobrou presnosťou považovať za inerciálnu vzťažnú sústavu
- napíšte všetky sily pôsobiace na vodiča a na spolujazdca vo vzťažnej sústave pevne spojenej s autom (počiatok na sedadle vodiča, osi sa otáčajú spolu s autom)
- vysvetlite, prečo to, čo ľudia bežne nazývajú odstredivou silou v tomto prípade nie je odstredivá sila. aká sila to je?