

FOURIEROVA METÓDA

riešenie vlnovej rovnice separáciou premenných

dve metódy riešenia vlnovej rovnice

d'Alembertova metóda

- riešenie sa uhádne v tvare postupných vln (v tvare superpozície postupných vln)
- funguje výborne v jednom rozmere, ale nedá sa preniesť do viacerých rozmerov
- riešenie je veľmi elegantné a jednoduché, ale bohužiaľ obmedzené na jeden rozmer

Fourierova metóda

- riešenie sa hľadá v dosť špeciálnom tvare, ktorý zodpovedá stojatým vlnám
 - funguje úplne dobre nielen v jednom, ale aj vo viacerých rozmeroch
 - riešenie má tvar nekonečného radu, ale jeho komplikovanosť nerastie s počtom dimenzií, čo je jeho hlavná výhoda
-

Fourierova metóda

- často sa jej hovorí aj **metóda separácie premenných** (a myslí sa tým niečo iné ako metoda separácie premenných v prípade obyčajných diferenciálnych rovníc)
 - funguje nielen pre vlnovú rovnicu, ale aj pre iné veľmi dôležité fyzikálne rovnice, napríklad pre rovnicu vedenia tepla alebo pre Schrödingerovu rovnicu
 - Fourierova metóda je ľahká na úsečke a pomocou istých rafinovaností sa dá preniesť aj na priamku (na rozdiel od d'Alembertovej metódy, ktorá bola ľahká na priamke a pomocou istých rafinovaností sa dala preniesť aj na úsečku)
-

tyč resp. struna s upevnenými koncami

- ikonický príklad Fourierovej metódy separácie premenných

- rovnica: $v^2 u''(x, t) - \ddot{u}(x, t) = 0$

počiatočné podmienky: $u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x)$

okrajové podmienky: $u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$

- základný vtip: riešenie hľadáme v tvare súčinu dvoch (zatiaľ neznámych) funkcií, z ktorých jedna závisí len od premennej x a druhá len od premennej t

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

poznámka: funkcie tohto typu nazývame stojatými vlnami (stoja na mieste a kmitajú)

a to sa môže?

- nuž, väčšina funkcií sa takto zapísať nedá - skúste to napríklad pre $u(x, y) = x + y$
 - hneď na začiatku sme teda v podstate celkom bezdôvodne drasticky zúžili okruh podozrivých, čo nevyzerá ako príliš dobrý nápad
 - ukáže sa, že napriek tomu nájdeme nekonečne veľa riešení rovnice s okrajovými podmienkami, ktoré však nebudú spĺňať zadané počiatkové podmienky
 - ale zachráni nás princíp superpozície: vhodnou superpozíciou nájdenejých riešení dokážeme splniť aj počiatkové podmienky
-

takže ideme na to

- prvý krok: dosadíme do rovnice

$$X''(x) \cdot T(t) - \frac{1}{v^2} X(x) \ddot{T}(t) = 0$$

- druhý krok: vydělíme funkcíou u

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0$$

- třetí krok (vtipný): fixujeme $t = t_{\text{fix}}$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha \quad \text{kde } \alpha = \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t_{\text{fix}})}{T(t_{\text{fix}})}$$

- čtvrtý krok (vtipný): fixujeme $x = x_{\text{fix}}$

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = v^2 \alpha \quad \text{to isté } \alpha$$

čo sme to dostali?

- neuveriteľné zjednodušenie
 - namiesto jednej parciálnej diferenciálnej rovnice pre $u(x, t)$ máme dve obyčajné diferenciálne rovnice pre $X(x)$ a $T(t)$
 - tie rovnice navyše nie sú previazané, ale tzv. separované (odtiaľ názov metódy)
 - a dokonca to ani nie sú dve rovnice, pretože je to vlastne dvakrát tá istá rovnica
 - a ešte k tomu je to rovnica LHO, ktorú už dávno vieme riešiť
-

riešenie rovnice pre $X(x)$

- pripomeňme si riešenia pohybovej rovnice LHO

pre $\alpha > 0$ $X(x) = c e^{\sqrt{\alpha} x} + c' e^{-\sqrt{\alpha} x}$

pre $\alpha = 0$ $X(x) = c x + c'$

pre $\alpha < 0$ $X(x) = c \sin \sqrt{|\alpha|} x + c' \cos \sqrt{|\alpha|} x$

- ktoré z nich spĺňajú okrajové podmienky?

- aké okrajové podmienky?

$$\forall t \quad u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$$

$$\forall t \quad u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(L) = 0$$

- $\alpha > 0$

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -c'$$

$$X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -c' = 0$$

- $\alpha = 0$

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c' = 0$$

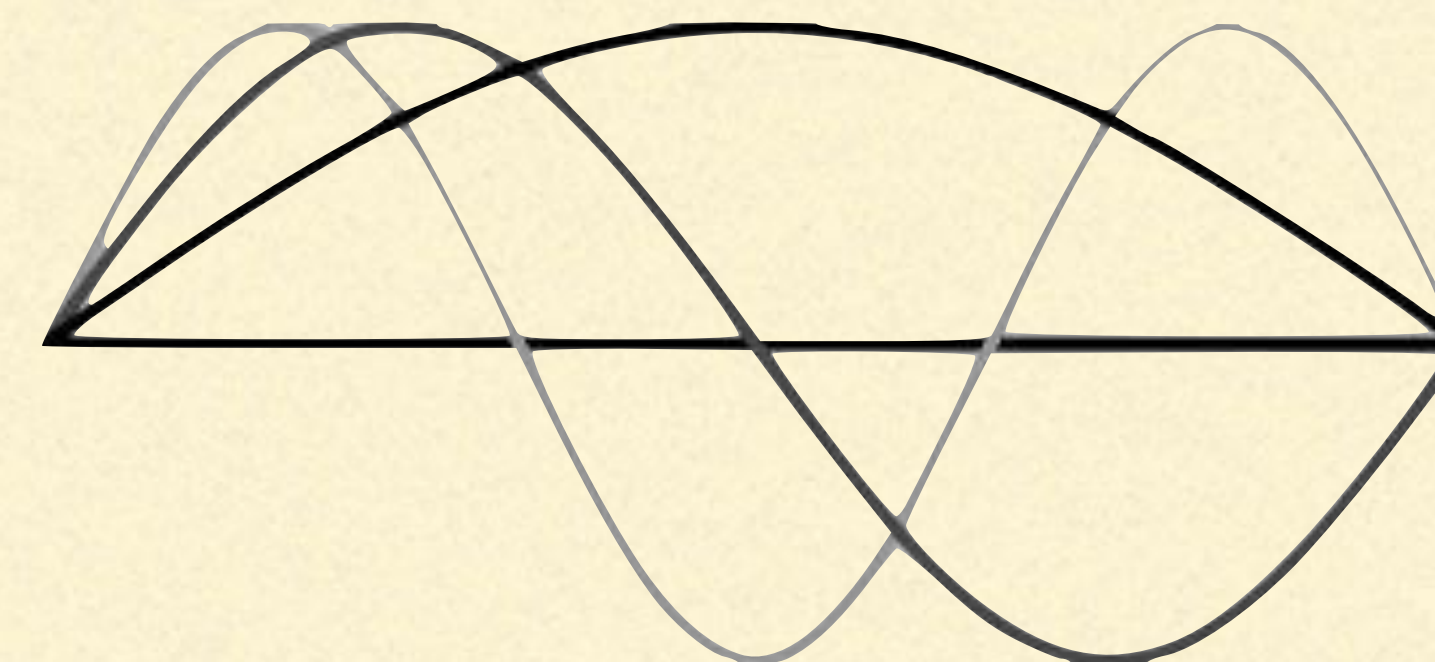
$$X(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

- $\alpha < 0$

len toto má nenulové riešenia

nenulové riešenie rovnice pre $X(x)$

- $X(x) = c \sin \sqrt{|\alpha|} x + c' \cos \sqrt{|\alpha|} x$
- $X(0) = 0 \Rightarrow c' = 0$
- $X(L) = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{|\alpha|} L = 0 \Rightarrow \sqrt{|\alpha|} L = n\pi$
- $X(x) = c \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, \dots$
- časté označenie: $X(x) = c \sin k_n x$ kde $\frac{n\pi}{L} = k_n$

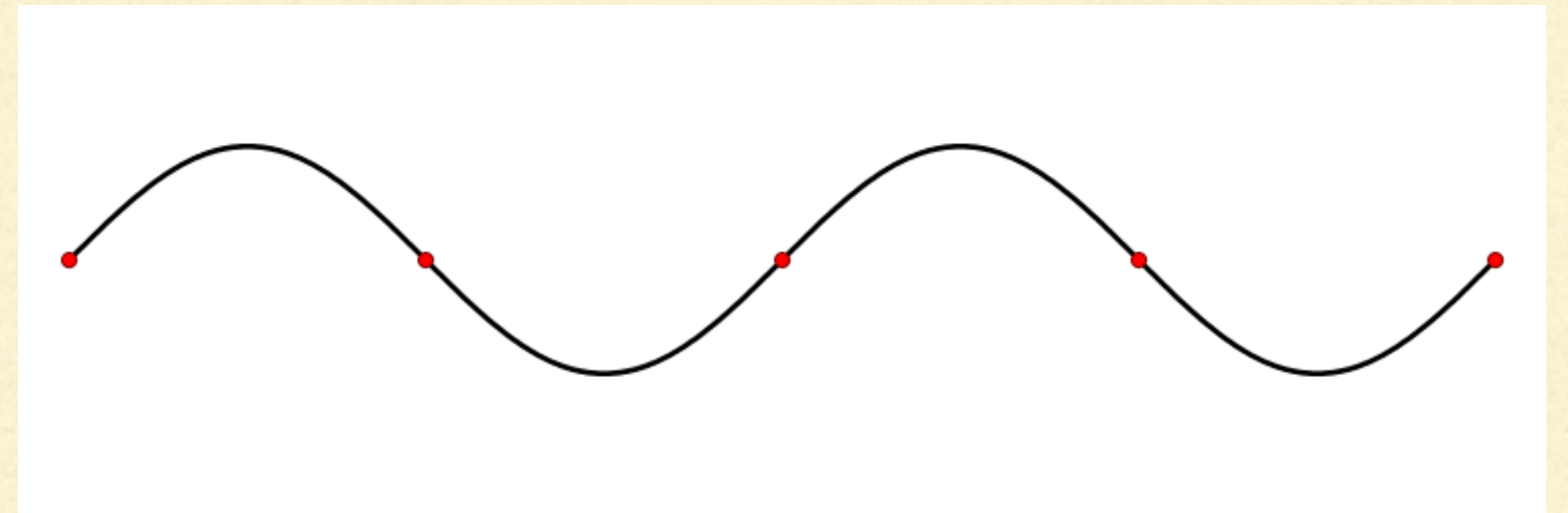


riešenie rovnice pre $T(t)$

- nás zaujíma len pre $\alpha < 0$, pretože len vtedy existovali nenulové riešenia pre $X(x)$
 - znova ide o riešenia rovnice pre LHO: $T(t) = c \sin \sqrt{v^2 |\alpha|} t + c' \cos \sqrt{v^2 |\alpha|} t$
 - ktoré obvykle zapisujeme takto: $T(t) = c \sin \omega_n t + c' \cos \omega_n t$
 - kde $\omega_n = v \sqrt{|\alpha|} = \frac{v n \pi}{L}$ čiže $\omega_n = v k_n$
 - ostáva už len posledná vec, ktorá ešte nie je splnená, a to počiatkové podmienky
-

stojaté vlny na tyči resp. strune

- majú tvar kmitajúcich sínusoviek
- poznámka: stojatá vlna je každá funkcia typu $u(x, t) = X(x) T(t)$
sínusovosť funkcií $X(x)$ je len špeciálna vlastnosť riešení pre tyč resp. strunu
- (uhlová) frekvencia kmitov ω_n je priamo úmerná prirodzenému číslu n



ako splniť počiatočné podmienky

- zatiaľ sme našli riešenia typu $c \sin k_n x \sin \omega_n t + c' \sin k_n x \cos \omega_n t$
 - tie spĺňajú špecifické počiatočné podmienky (ktoré získame dosadením $t = 0$)
 - my však potrebujeme splniť všeobecné počiatočné podmienky dané funkciami $f(x)$ a $g(x)$ (t.j. všeobecnými počiatočnými hodnotami výchylky a rýchlosti)
 - na to nami nájdené riešenia nepostačujú, ale postačujú na to superpozície takých riešení (ktoré sú podľa princípu superpozície tiež riešeniami vlnovej rovnice)
-

superpozícia riešení a poč. podmienky

- riešením vlnovej rovnice je okrem nájdených riešení typu $X(x)T(t)$ aj superpozícia

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x \sin \omega_n t + c'_n \sin k_n x \cos \omega_n t$$

- úloha: vypočítajte pre túto funkciu prvú parciálnu deriváciu podľa času (budeme ju potrebovať kvôli počiatočným podmienkam)

- poč. podm. $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \sin k_n x = f(x)$ $\dot{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \sin k_n x = g(x)$

veľké finále

- dajú sa koeficienty c_n a c'_n vybrať tak, aby boli splnené počiatkové podmienky?
- odpoveď: áno dajú, pretože nejde o nič iné ako o koeficienty Fourierových radov
- Fourierove rady:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \sin k_n x$$

$$c'_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin k_n x \, dx$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \sin k_n x$$

$$c_n \omega_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin k_n x \, dx$$
