Najväčší Newtonov objav

spoľahlivé veštenie

mechanika 3

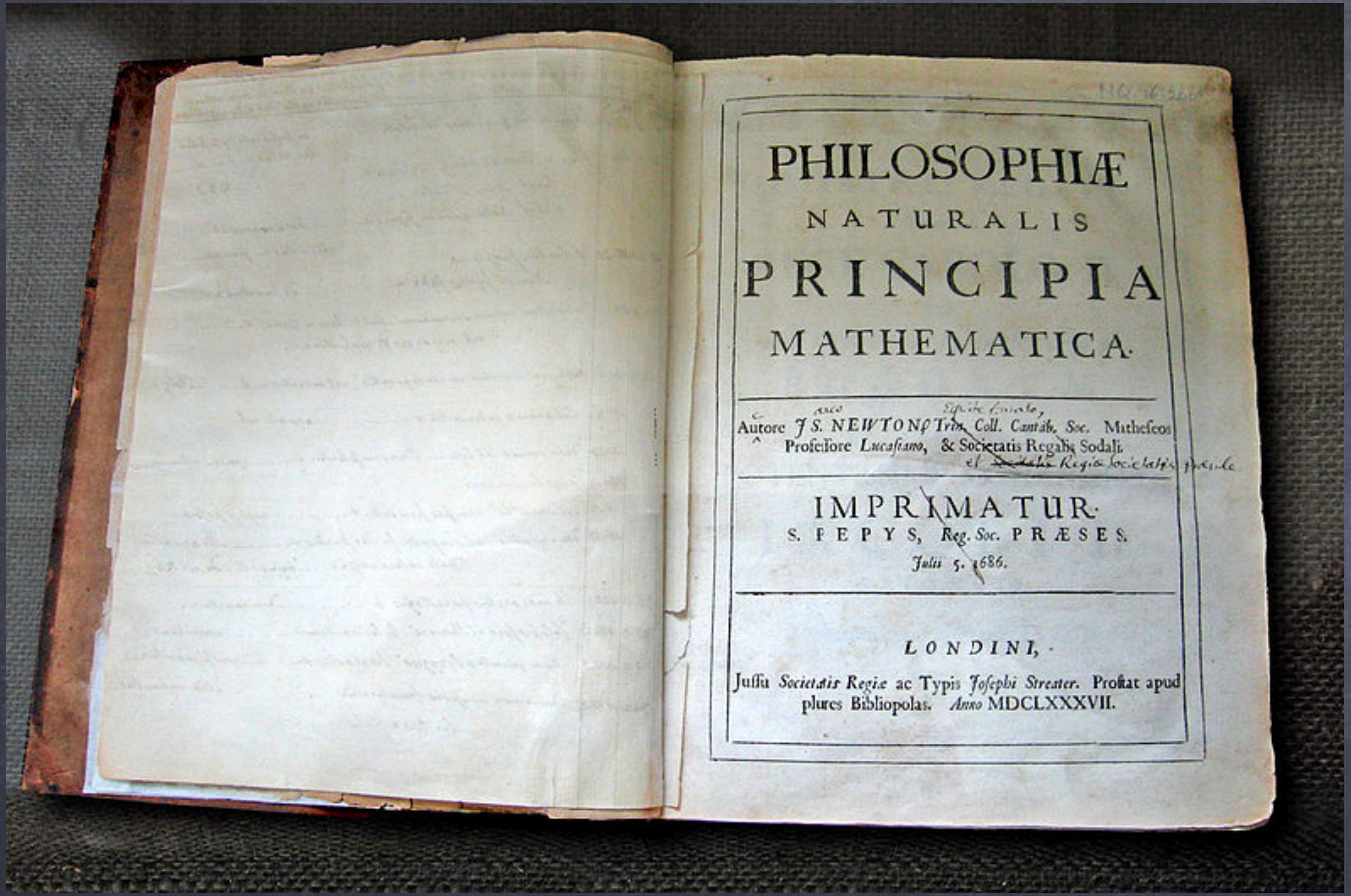
Isaac Newton (1643–1727) objavil okrem iných vecí zákony mechaniky, medzi nimi najmä zákon sily, zákony pre všelijaké sily, medzi nimi najmä gravitačný zákon, a novú matematiku, najmä diferenciálny a integrálny počet. Spolu tomu hovoríme, že objavil spoľahlivé veštenie.

súčasníci

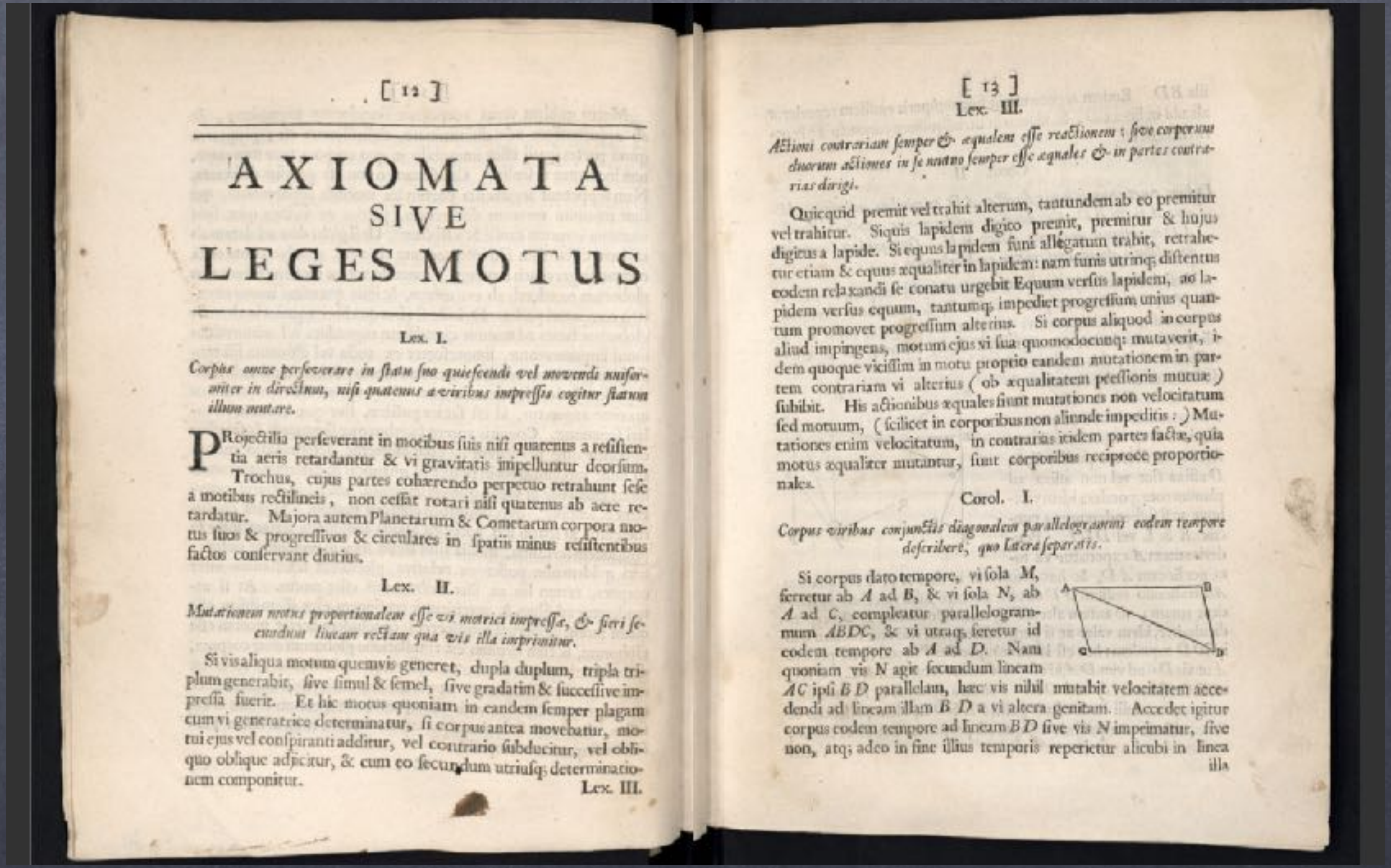
Daniel Defoe, Jonathan Swift, Johann Sebastian Bach, Peter Veľký, Juraj Jánošík

Trinity College, Cambridge

Základná kniha skutočnej mágie



Matematické princípy prírodnej filozofie



Pohybové zákony (str. 12)

prvý zákon

Každé teleso zotrváva v stave pokoja
alebo rovnomerného pohybu po rovnej čiare,
pokiaľ nie je prinútené tento stav zmeniť
silami pôsobiacimi na toto teleso.

- Hneď na začiatku razantná rozlúčka s Aristotelom.
- Zovšeobecnenie Galileovho zákona zotrvačnosti (ktorý sa týkal len pohybu vo vodorovnom smere)

druhý zákon

Zmena množstva pohybu je vždy úmerná pôsobiacej sile a deje sa v smere rovnej čiary, v ktorej sila pôsobí.

- Pod množstvom pohybu sa tu myslí súčin jeho hmotnosti a rýchlosti (tak je to predtým definované v časti Definície) a pod úmernosťou sa v skutočnosti rozumie rovnosť
- Toto je najdôležitejší fyzikálny zákon všetkých čias (všetky ostatné sú len variáciami na túto základnú tému)

Čo vlastne hovorí druhý zákon?

$$\vec{F} = m \,.\, \vec{a}$$

Prečo je práve toto také dôležité?

Pretože to umožňuje predpovedať budúcnosť
(a to v mnohých prípadoch úplne jednoznačne a presne)

základná otázka

- Ak sa konkrétne teleso nejako pohybuje tu a teraz, kde bude a ako sa bude pohybovať o chvíľu? (nejako sa pohybovať znamená mať nejakú rýchlosť)
- Bežné označenia:

tu	$\vec{r}$
teraz	t
tu a teraz	$\vec{r}(t)$
chvíľa	Δt
rýchlosť	$\vec{v}$

odpoveď

- S polohou je to jednoduché:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\,.\,\Delta t$$

- S rýchlosťou vlastne tiež:

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,.\,\Delta t$$

$\vec{r}(t)$	poloha teraz
$\vec{r}(t+\Delta t)$	poloha o chvíľu
$\vec{v}(t)$	rýchlosť teraz
$\vec{a}(t)$	zrýchlenie teraz

- Zrýchlenie poznáme práve vďaka druhému Newtonovmu zákonu.
- Celé to platí len približne, pretože rýchlosť aj zrýchlenie sa menia (nie sú stále také, ako boli na začiatku). Priblíženie je tým lepšie (presnejšie), čím kratšia je chvíľa (uvažovaný časový interval).

A ako nájsť dostatočne presnú odpoveď pre dlhé časy?

- Po malých krokoch, krok za krokom $t_0, \ t_0 + \Delta t, \ t_0 + 2\Delta t, \ \ldots$
- Počiatočné podmienky: $\vec{r}_0, \ \vec{v}_0$
- Jednotlivé kroky: $\vec{r}_n, \ \vec{v}_n$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{n+1} &= \vec{r}_n + \vec{v}_n \, . \, \Delta t \\ \vec{v}_{n+1} &= \vec{v}_n + \vec{a}_n \, . \, \Delta t \end{aligned}}$$

ideálna práca pre počítač

- Zadaj počiatočné podmienky
- Vypočítaj po malých krokoch vždy nové polohy a rýchlosti
- Nakresli výslednú trajektóriu (prípadne aj grafy závislosti rôznych zložiek polohy alebo rýchlosti od času)
- Lepšia presnosť sa dá dosiahnuť zmenšením kroku (krok sa oplatí zmenšovať dovtedy, kým sa ešte výsledky ako-tak menia)

Newton a počítače?

- Nie, on to tak nerobil (aj keď vedel, že sa to tak robiť dá)
- Vymyslel matematiku, pomocou ktorej vedel urobiť úplne presne veci, ktoré my s počítačom dokážeme dosť presne, ale nie úplne presne. (Neskôr sa túto matiku naučíme.)
- Zaujímavosť: Knihu nenapísal v jazyku tejto novej matiky (pomocou ktorej na veci prišiel), ale v jazyku geometrie (ktorý bol v tom čase pre čitateľov zrozumeteľnejší)
- Ale pre nás, vyzbrojených počítačmi, je to ideálna metóda na porozumenie Newtonovej mechanike.

hodili by sa príklady

- Vypočítame, ako vyzerá pohyb telesa, na ktoré pôsobí gravitácia aj odpor vzduchu

- Urobíme to pomocou programov v Pythone. Z počiatočnej podmienky a zo známych síl dokážeme prepovedať (vyveštiť) celý pohyb

- Ak budeme poznať celý pohyb, dokážeme odpovedať na rôzne konkrétne otázky týkajúce sa tohto pohybu

?

prvý príklad: tenisová loptička

- skúsme takúto otázku:
  Dá sa zahrať od základnej čiary vodorovný úder vo výške ramena tak, aby prešiel ponad sieť a potom dopadol do kurtu?
- najprv to počítajme bez odporu vzduchu (to by vedel aj Galileo), ale potom sa pozrieme aj na to, ako sa dá tento odpor zarátať (to už by Galileo nevedel)

dĺžka kurtu	23.77 m
šírka kurtu	8.23 m
výška siete (v strede)	0.91 m
hmotnosť loptičky	0.057 kg
polomer loptičky	0.034 m
rýchlosť loptičky pri forehande (muži)	35 m/s

- počiatočné podmienky:

  $x_0 = 0$ $\quad z_0 = 1.5$

  $vx_0 = 35$ $\quad vz_0 = 0$

- zrýchlenie (sa v tomto prípade nemení, takže ho stačí zadať raz)

  $ax_n = 0$ $\quad az_n = -9.81$

- počítanie

  $x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

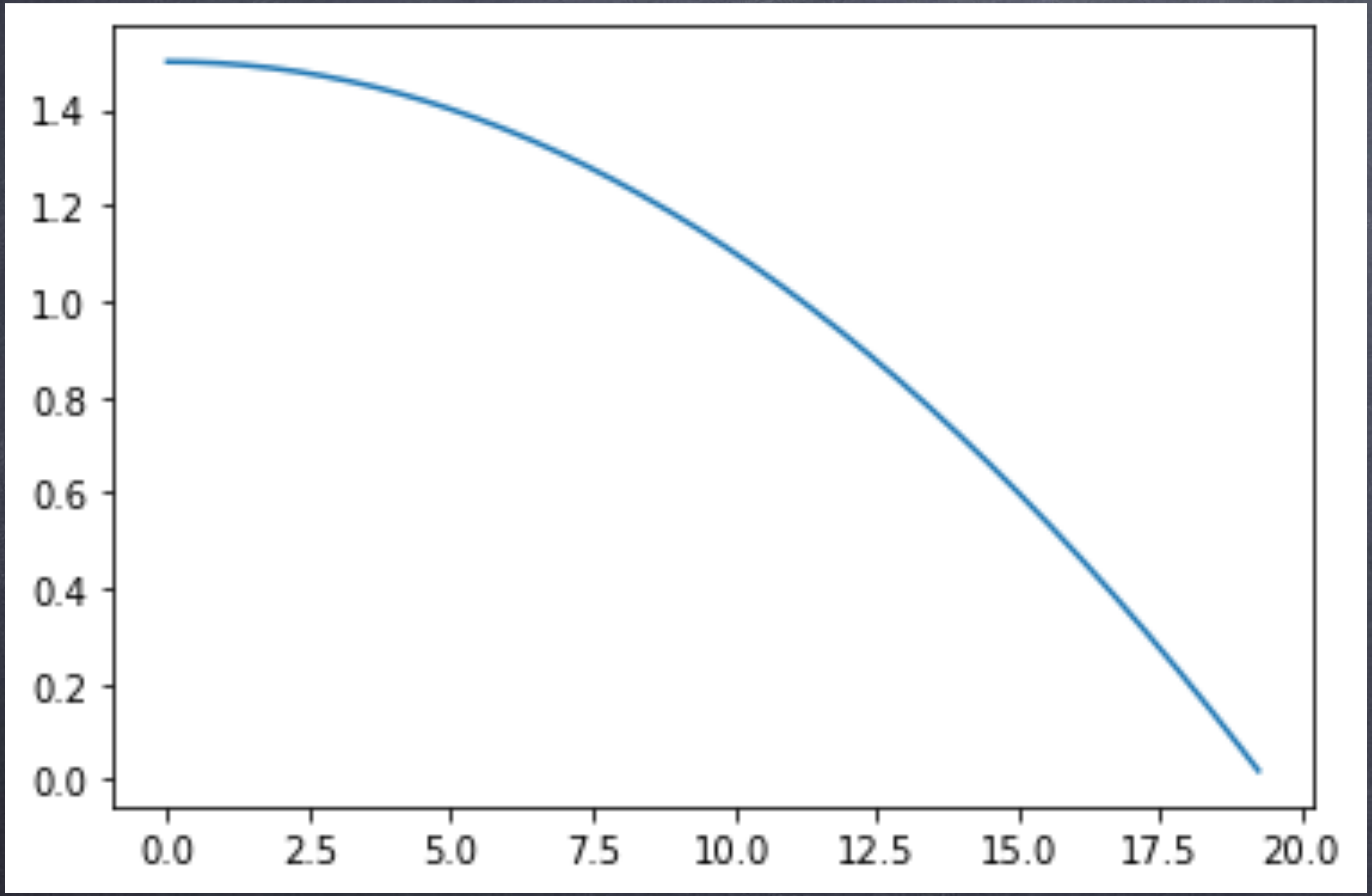
  $z_{n+1} = z_n + vz_n * dt$

  $vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

  $vz_{n+1} = vz_n + az_n * dt$

```python
from pylab import *

dt=0.001
N=550

x=empty(N+1)
z=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vz=empty(N+1)

m=0.057
g=-9.81

x[0]=0.
z[0]=1.5
vx[0] = 35.
vz[0] = 0.

for n in range(0,N):
    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    z[n+1]=z[n]+vz[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]            # Fx=0
    vz[n+1]=vz[n]+g*dt       # Fz=m*g

plot(x,z)
```

nezdravý tenis (vo vákuu)



Numerické výstupy:

z[547] 0.035

loptička dopadá po čosi viac ako pol sekunde

x[340] 11.90

z[340] 0.93

loptička neprejde ponad sieť (93 < 91 + 3.4 cm), ale má šancu na "prasa".

odpor vzduchu

- Sila odporu vzduchu je vo všeobecnosti komplikovanou funkciou rýchlosti, ale pre typické rýchlosti lôpt v športe je veľkosť tejto sily úmerná druhej mocnine rýchlosti

$$F = \alpha \,.\, v^2$$

- Smer sily odporu vzduchu je opačný ako smer rýchlosti

$$\overrightarrow{F} = -\,\alpha \,.\, v \,.\, \overrightarrow{v}$$

- Koeficient alfa je daný súčinom hustoty prostredia, prierezu loptičky a polovice istého aerodynamického koeficientu C (pre tenisovú loptičku je C okolo 0.5)

$$\alpha = \frac{1}{2}\, C\, \rho\, \pi r^2 = 0.001 \quad \text{[v jednotkách SI]}$$

- počiatočné podmienky:

  $x_0 = 0 \qquad z_0 = 1.5$

  $vx_0 = 35 \qquad vz_0 = 0$

- počítanie

  $v_n = \mathrm{sqrt}\ (\ vx_n^2 + vz_n^2\ )$

  $ax_n = (-\ 0.001\ v_n\ vx_n)\ /\ m$

  $az_n = (mg\ -\ 0.001\ v_n\ vz_n)\ /\ m$

  $x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

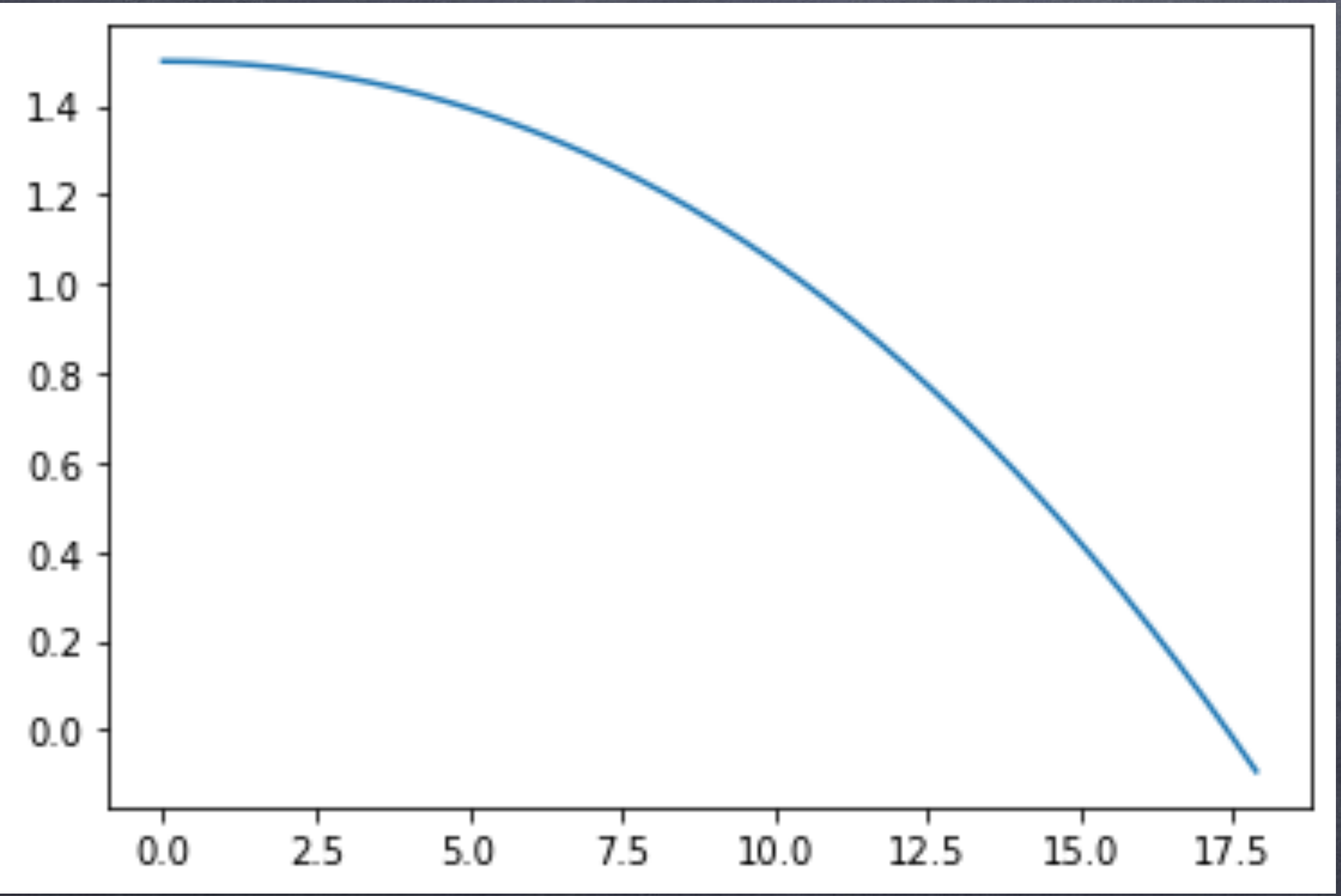
  $z_{n+1} = z_n + vz_n * dt$

  $vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

  $vz_{n+1} = vz_n + az_n * dt$

```python
from pylab import *

dt=0.001
N=600

x=empty(N+1)
z=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vz=empty(N+1)
v=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
az=empty(N+1)

m=0.057
g=-9.81

x[0]=0.
z[0]=1.5
vx[0] = 35.
vz[0] = 0.

for n in range(0,N):
    v[n]= sqrt( vx[n]*vx[n] + vz[n]*vz[n] )
    ax[n]= -0.001 * v[n] * vx[n] / m
    az[n]= ( m*g - 0.001 * v[n] * vz[n] )/m
    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    z[n+1]=z[n]+vz[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vz[n+1]=vz[n]+az[n]*dt

plot(x,z)
```

tenis na čerstvom vzduchu



Numerické výstupy:

z[574] 0.037

Loptičke to trvá o čosi dlhšie ako bez vzduchu

x[377] 11.87

z[377] 0.85

loptička tentoraz nepreletí cez sieť

druhý príklad: vrh guľou

- skúsme takúto otázku:
  Pod akým uhlom má atlét vrhať guľu, aby doletela čo najďalej?
- Bez odporu vzduchu je všeobecne známa (nesprávna) odpoveď 45°. Aká je správna odpoveď a ako sa táto odpoveď zmení, ak vrháme guľu v reálnom svete?
- Je to vlastne otázka z balistiky (delostrelectva), preformulovaná do pacifistickej podoby.

hmotnosť gule (muži)	7.26 kg
hmotnosť gule (ženy)	4.00 kg
polomer gule (muži)	0.06 m
polomer gule (ženy)	0.05 m
svetový rekord (muži)	23.37 m
svetový rekord (ženy)	22.63 m
koeficient alfa (v SI)	
muži	0.003
ženy	0.002

- počiatočné podmienky:

$x_0 = 0$

$z_0 = 2.$

$v_0 = 14.$

uhol = 42. (v stupňoch)

theta = uhol . pi/180 (v radiánoch)

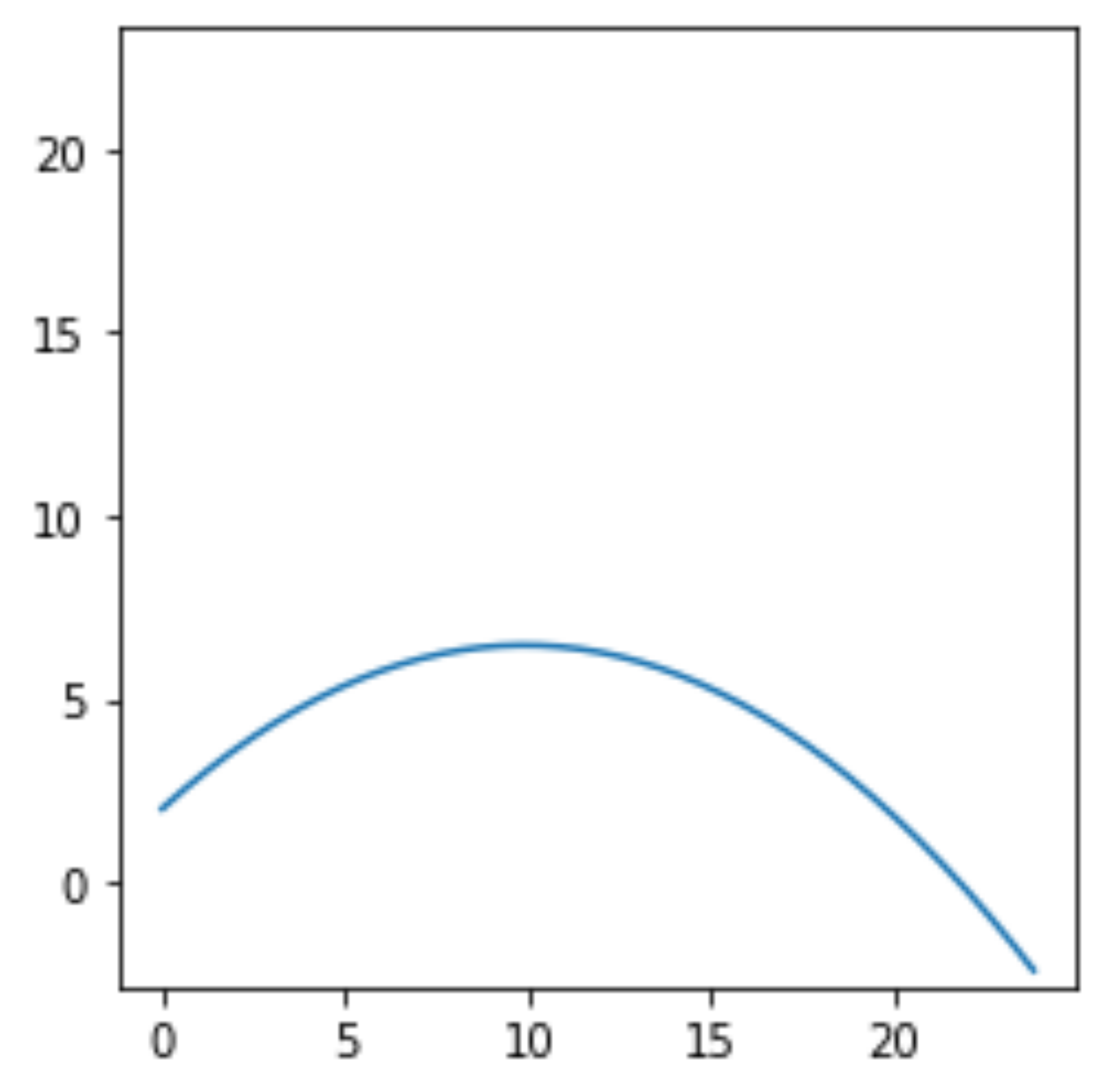
$vx_0 = v_0 \, . \, \cos(theta)$

$vz_0 = v_0 \, . \, \sin(theta)$

- počítanie
rovnaké, ako predtým

```
from pylab import *
from numpy import *

dt=0.001
N=2300

x=empty(N+1)
z=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vz=empty(N+1)
v=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
az=empty(N+1)
print(type(x))

m=7.26
g=-9.81

x[0]=0.
z[0]=2.0

v0 = 14.
uhol = 42. # v stupňoch

theta = uhol * pi/180.
vx[0] = v0 * cos(theta)
vz[0] = v0 * sin(theta)

for n in range(0,N):
    v[n]= sqrt( vx[n]*vx[n] + vz[n]*vz[n] )
    ax[n]= -0.003 * v[n] * vx[n] / m
    az[n]= (m*g - 0.003 * v[n] * vz[n])/m
    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    z[n+1]=z[n]+vz[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vz[n+1]=vz[n]+az[n]*dt

plot(x,z)
axis('square')
```

vrh guľou - výsledky



Numerické výstupy:

vzduch
optimálny uhol 42°
dolet 21.70 m

vákuum
optimálny uhol 43°
dolet 21.84 m

dôležité upozornenie:
Optimálny uhol vo vákuu je notoricky známych 45° len pre vrh z výšky 0 m

A do tretice futbal

- skúsme takúto otázku:
  Ako sa zmení dĺžka výkopu futbalového brankára, ak fúka slabý vietor s rýchlosťou 3 m/s
  a) v smere výkopu
  b) proti smeru výkopu
  c) ide o bočný vietor
- základná zmena (zovšeobecnenie): v odporovej sile musí vystupovať relatívna rýchlosť telesa vzhľadom k vzduchu

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$$

hmotnosť lopty	0.43 kg
polomer lopty	0.11 m
koeficient alfa	0.006
bežná dĺžka výkopu	50 m

označenie:

rýchlosť lopty	$\vec{v}$
rýchlosť vetra	$\vec{w}$
vzájomná rýchlosť	$\vec{u}$

- počítanie

$ux_n = vx_n - wx$

$uy_n = vy_n - wy$

$uz_n = vz_n - wz$

$u_n = \mathrm{sqrt}\,(\, ux_n^{\,2} + uy_n^{\,2} + uz_n^{\,2}\,)$

$ax_n = (-\ 0.006\ u_n\ ux_n) \,/\, m$

$ay_n = (-\ 0.006\ u_n\ uy_n) \,/\, m$

$az_n = (mg - 0.006\ u_n\ uz_n) \,/\, m$

$x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

$y_{n+1} = y_n + vy_n * dt$

$z_{n+1} = z_n + vz_n * dt$

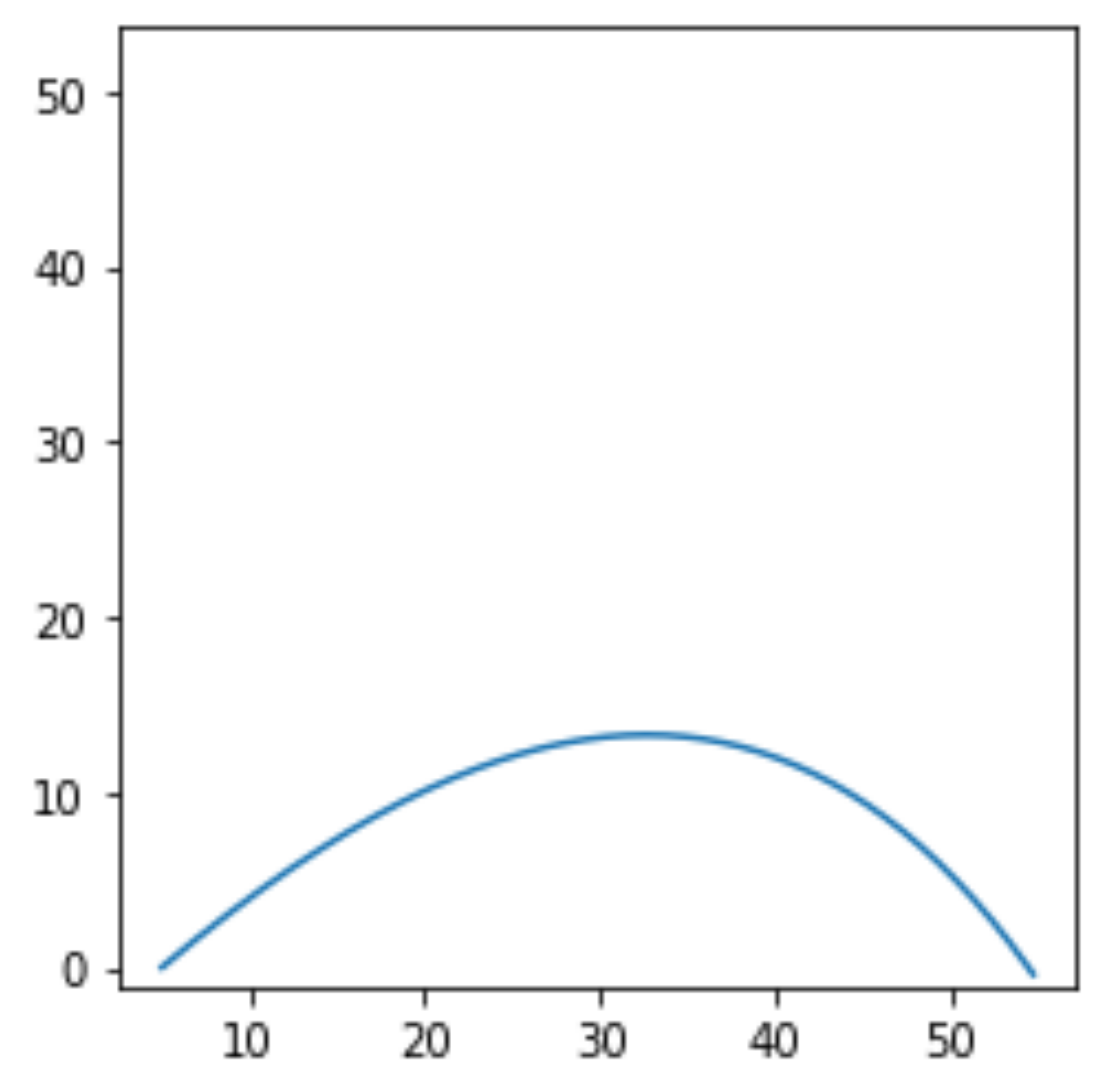
$vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

$vy_{n+1} = vy_n + ay_n * dt$

$vz_{n+1} = vz_n + az_n * dt$

```
m=0.43
g=-9.81

wx = 0.
wy = 0.
wz = 0.

x[0]=5.
y[0]=0.
z[0]=0.

v0 = 30.
uhol = 40. # v stupňoch

theta = uhol * pi/180.
vx[0] = v0 * cos(theta)
vy[0] = 0.
vz[0] = v0 * sin(theta)

for n in range(0,N):
    ux[n] = vx[n] - wx
    uy[n] = vy[n] - wy
    uz[n] = vz[n] - wz
    u[n]= sqrt( ux[n]*ux[n] + uy[n]*uy[n] + uz[n]*uz[n] )
    ax[n]= -0.006 * u[n] * ux[n] / m
    ay[n]= -0.006 * u[n] * uy[n] / m
    az[n]= (m*g - 0.006 * u[n] * uz[n])/m
    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    y[n+1]=y[n]+vy[n]*dt
    z[n+1]=z[n]+vz[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vy[n+1]=vy[n]+ay[n]*dt
    vz[n+1]=vz[n]+az[n]*dt

plot(x,z)
axis('square')
```

odkop od bránky - výsledky



Numerické výstupy:

bezvetrie

optimálny uhol	40°
dolet	54.39 m

vietor v smere

dolet (pri uhle 40°)	59.70 m

vietor v protismere

dolet (pri uhle 40°)	48.98 m

bočný vietor

dolet (pri uhle 40°)	54.26 m
posun v kolmom smere	3.35 m

Zhrnutie

- Druhý Newtonov zákon (zákon sily) nám umožňuje zo známych počiatočných podmienok (poloha a rýchlosť) a zo známych pôsobiacich síl vypočítať celý pohyb (budúci aj minulý).
- Ak poznáme celý pohyb, vieme odpovedať na všetky otázky týkajúce sa tohto pohybu.
- Ilustrovali sme si to na pohybe gule, na ktorú pôsobila gravitačná sila a sila odporu prostredia (ktorá je vo všeobecnosti zložitejšia než sme uvažovali my, ale náš prístup bol rozumne realistickým priblížením)

Čo nás čaká ďalej?

- Naučiť sa, aké všelijaké sily môžu pôsobiť na telesá.
- Naučiť sa, ako sa dá predpovedať pohyb úplne presne, nielen približne metódou krok za krokom.

úloha na záver

- Nájdite pohyb lopty pri výkope od bránky pri futbale vodníkov na dne jazera. Ako sa zmení dĺžka výkopu v porovnaní s naším futbalom?
- Ak vám vyšla nejaká dĺžka výkopu, t.j. ak vám lopta dopadla na dno jazera, máte tam zjavne chybu (lopta v skutočnosti skončí na hladine, nie na dne). Zrejme ste zabudli na vztlakovú silu z Archimedovho zákona. Takže nech sa páči, ešte raz, aj s touto silou.