JAMA a KYVADLO
časť druhá: kyvadlo

pohyb tuhého telesa s jedným upevneným bodom

mechanika 31

špeciálny prípad dvojrozmerného pohybu

- na minulej prednáške sme vyšetrovali rovnováhu tuhých telies upevnených aspoň v jednom bode, teraz vyšetríme pohyb takýchto telies
- všeobecný pohyb 2D tuhého telesa vyšetrujeme ako pohyb jedného jeho bodu a rotáciu okolo tohto bodu
- ak je jeden bod telesa upevnený, jeho pohyb poznáme (nehýbe sa) a jediné, čo treba vyšetriť, je rotácia okolo toho upevneného bodu

všeobecný prípad dvojrozmerného pohybu

- v mnohých prípadoch sa dajú posuvný a rotačný pohyb vyšetrovať oddelene
- vo všeobecnosti však neplatí, že sily závisia len od polohy a nie od orientácie, rovnako ako neplatí, že momenty síl závisia len od orientácie a nie od polohy
- vo všeobecnosti sú pohybové rovnice pre posuvný a pre rotačný pohyb

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \varphi, \dot{\varphi}, t) \qquad I\ddot{\varphi}(t) = M(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$$

navzájom previazané a musia sa riešiť naraz a spolu

ak je teleso upevnené v jednom bode, zostane nám z dvoch rovníc na riešenie len jedna

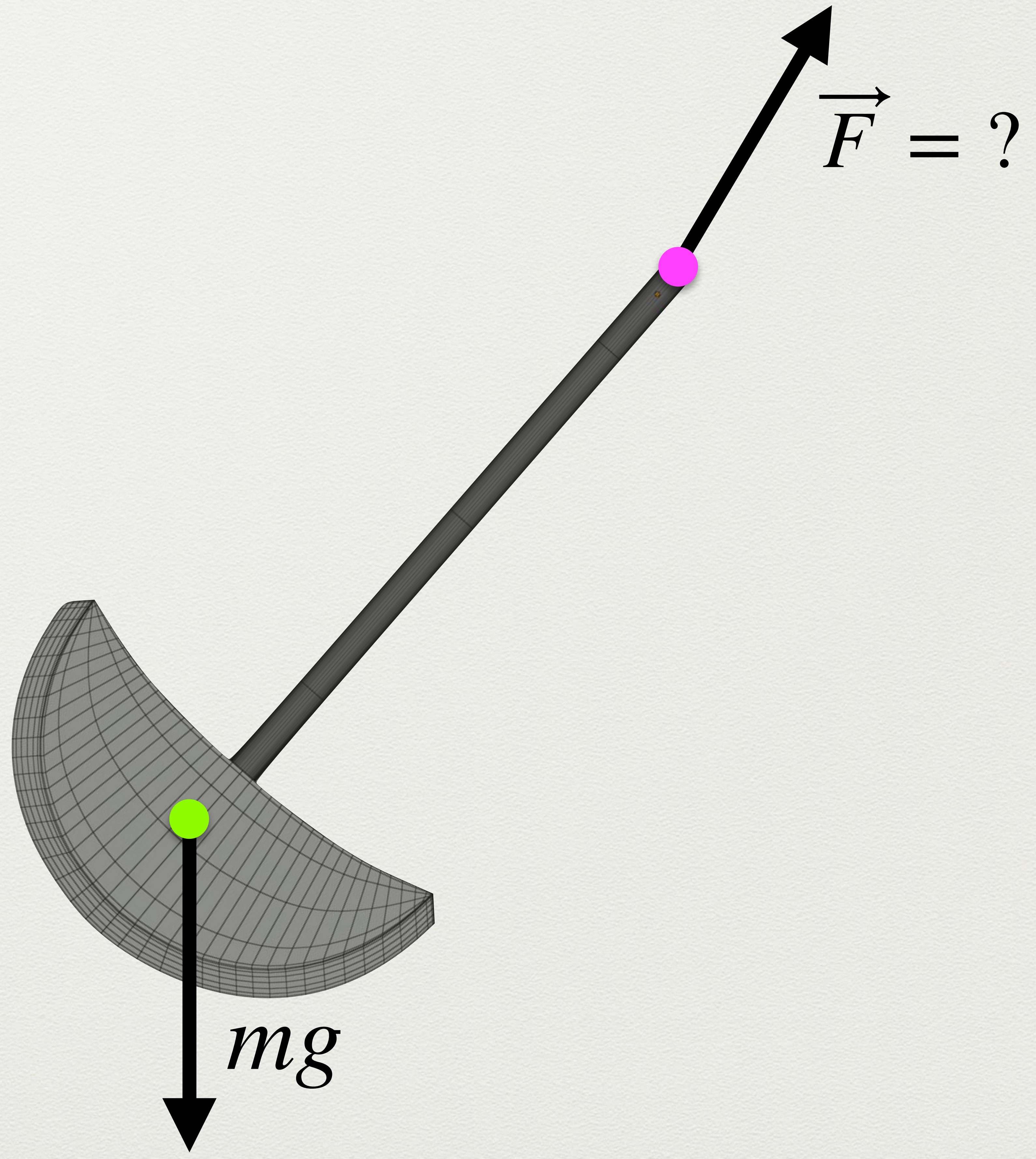
sily pôsobiace na fyzikálne kyvadlo

- na fyzikálne kyvadlo (t.j. teleso zavesené v gravitačnom poli) pôsobia dve sily: gravitačná a nejaká sila v bode závesu

- výsledná gravitačná sila má veľkosť *mg* a moment tejto sily je taký, ako keby pôsobila v hmotnom strede telesa

- v bode upevnenia musí pôsobiť nejaká premenlivá sila, ktorá zabezpečí, že bod upevnenia sa nezačne pohybovať

- smer ani veľkosť tejto sily nepoznáme

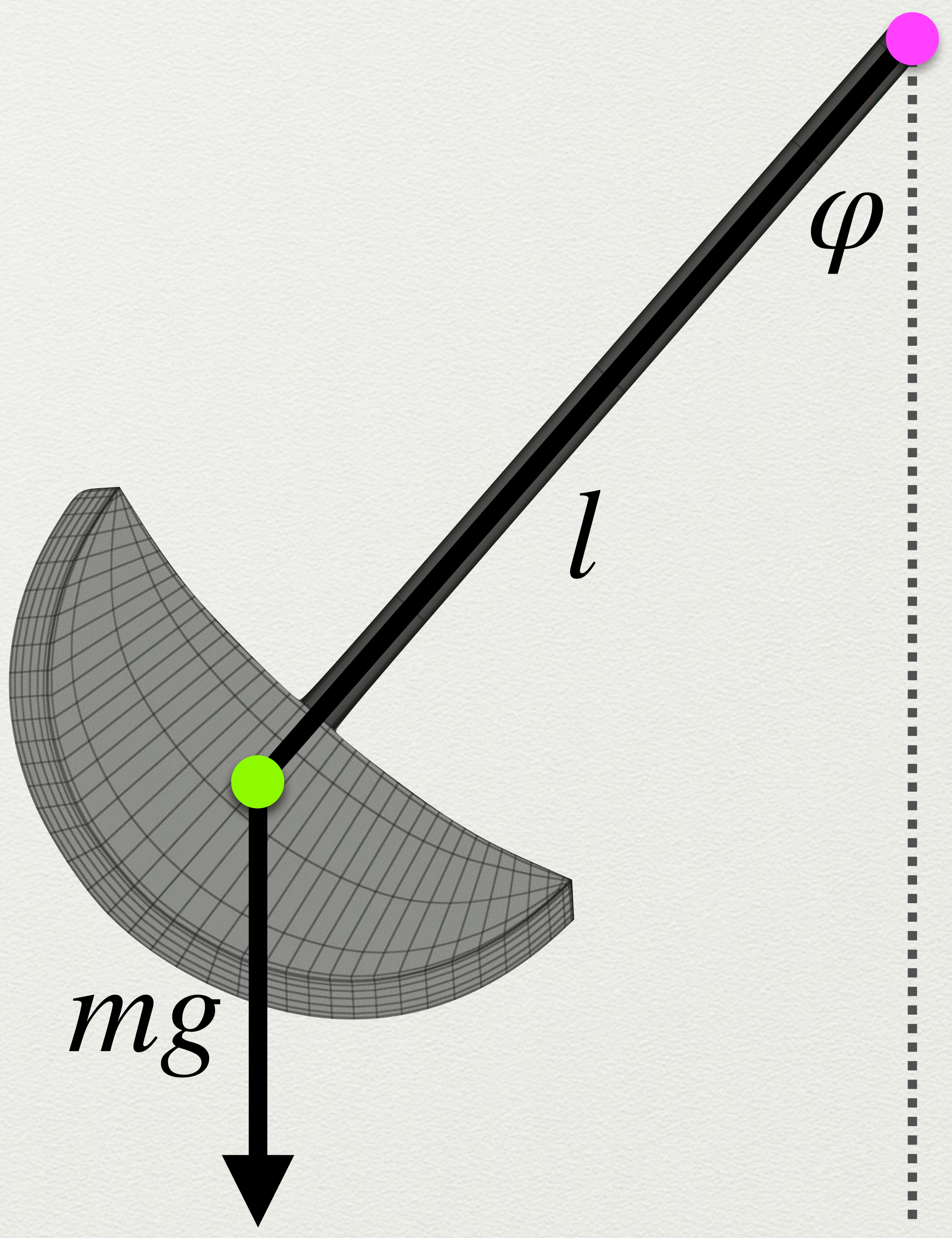


ako vypočítať moment neznámej sily?

- v skutočnosti je to veľmi jednoduché, netreba nič iné, než počítať moment tejto sily vzhľadom k jej pôsobisku

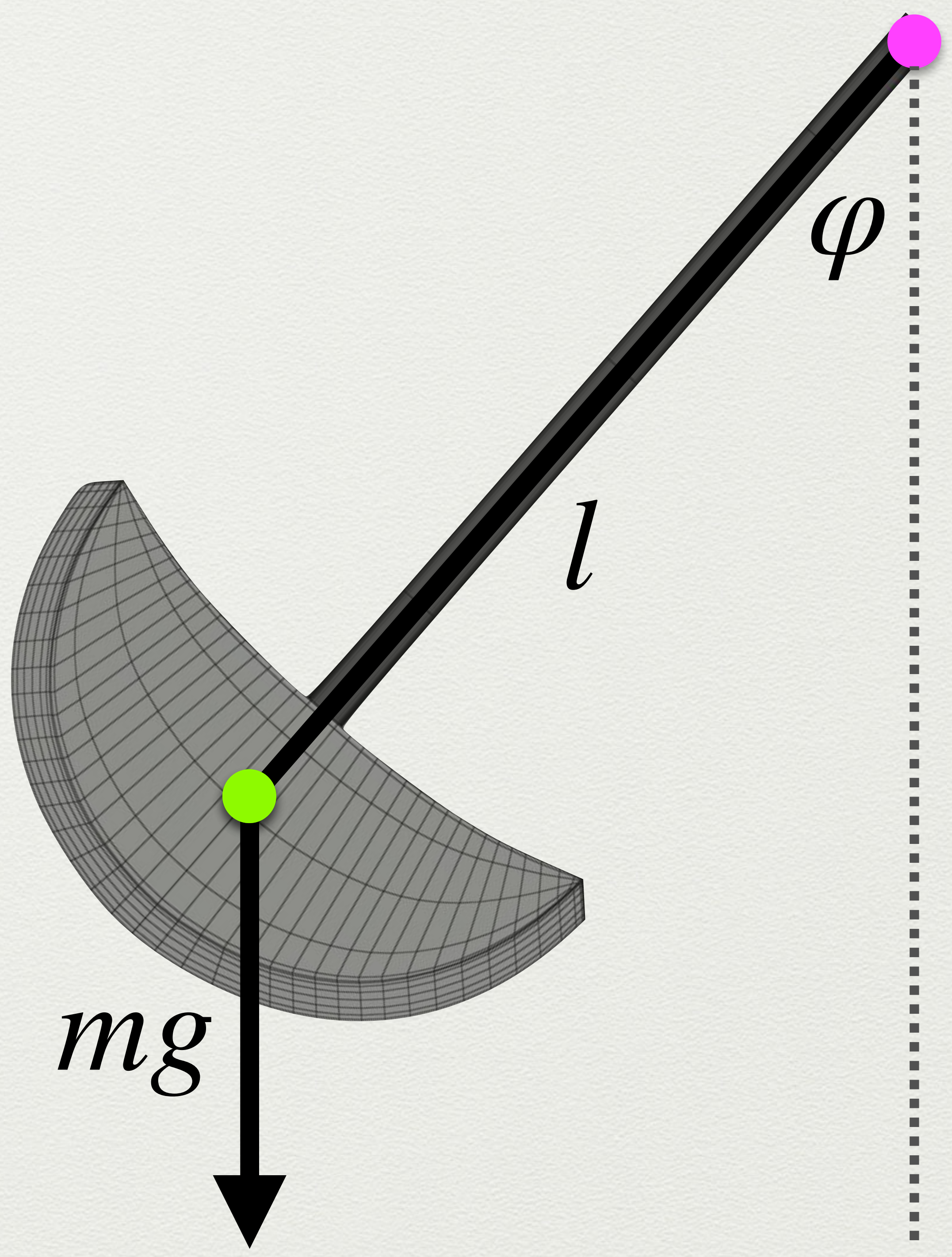
- vtedy je totiž rameno tejto sily nulové, a nulový je teda aj jej moment, nech už je sila samotná akékoľvek

- teraz už potrebujeme len moment M gravitačnej sily vzhľadom k tomuto bodu, plus moment zotrvačnosti I vzhľadom tomuto bodu a pohybová rovnica bude: $I\ddot{\varphi} = M$



kyvadlo

- φ je uhol od vertikály meraný v kladnom smere (proti smeru chodu hodinových ručičiek)
- I je moment zotrvačnosti vzhľadom k bodu závesu
- l je vzdialenosť hmotného stredu od bodu závesu
- moment gravitačnej sily vzhľadom k bodu závesu:
$$M = -mgl\sin\varphi$$
(premyslite si, prečo je tam záporné znamienko)
- pohybová rovnica je nelineárna diferenciálna rovnica:



$$\boxed{I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi}$$

malé kmity fyzikálneho kyvadla

- pod malými kmitmi sa myslia kmity s uhlom φ do $5°$ (zhruba 0.1 rad)
- $\sin 0.1 = 0.0998$ a pre menšie uhly platí $\sin\varphi \approx \varphi$ s ešte lepšou presnosťou
- pre malé kmity ($\varphi \leq 5°$) teda dostávame približnú rovnicu $I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi$
- toto už je lineárna diferenciálna rovnica, ktorú vieme riešiť
- navyše je to dôverne známa rovnica LHO, ktorú už máme vyriešenú
- nič iné sa ani nedalo čakať – všetko v okolí stabilnej rovnováhy je LHO

rovnaká rovnica
rovnaké riešenie

- riešením pohybovej rovnice LHO
  $m\ddot{x} + kx = 0$ je $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$
  kde $\omega = \sqrt{k/m}$ a konštanty A, α
  sa určia z počiatočných podmienok

- riešením pohybovej rovnice kyvadla
  $I\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$ je $\varphi(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$
  kde $\omega = \sqrt{mgl/I}$ a konštanty A, α
  sa určia z počiatočných podmienok

- vybavené, nič nové tu nie je

pohyb telesa na ktoré pôsobí sila $F = -kx$

- pohybová rovnica: $m\,.\,\ddot{x}(t) = -k\,.\,x(t)$ respektíve $m\,.\,\ddot{x}(t) + k\,.\,x(t) = 0$
- je to lineárna dif. rovnica s konšt. koef. a s nulovou pravou stranou
- recept na riešenie týchto rovníc poznáme: riešenie hľadaj v tvare $e^{\alpha t}$
- dosadením do rovnice dostaneme: $m\alpha^2 + k = 0$
- riešenie: $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}}$ odmocnina zo záporného čísla, čo s tým?
- pripomienka : $i^2 = -1$ $\alpha = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$ kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

nepovinná, ale užitočná domáca úloha

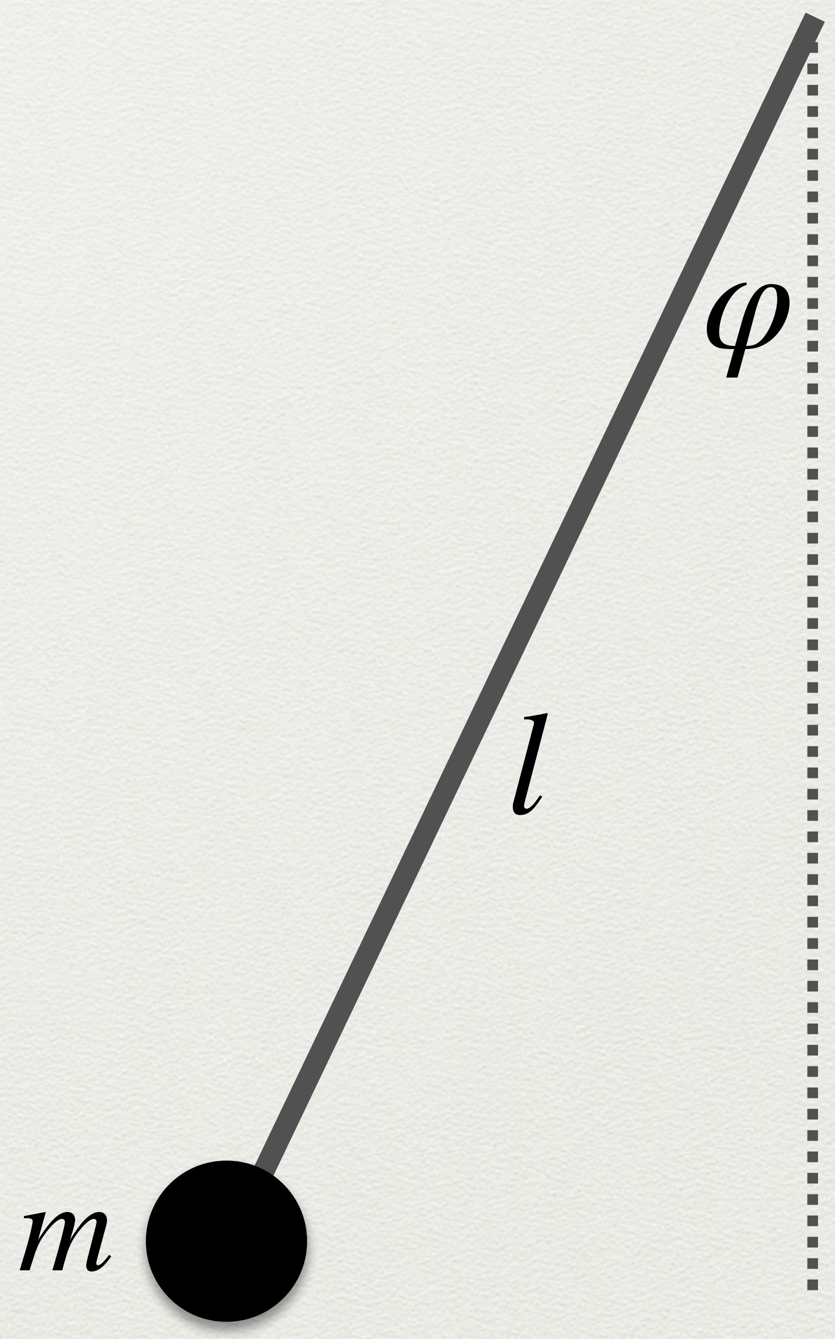
- ukážte, že naše riešenie sa dá napísať aj v tvare $x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$
- vyjadrite konštanty a, φ zo zadaných počiatočných podmienok
- pomocou pythonu alebo iného programu nakreslite pre rôzne hodnoty parametrov m, k, x_0, v_0 grafy závislostí polohy a rýchlosti od času
- napíšte a vyriešte pohybovú rovnicu pre lineárny harmonický oscilátor, ktorého rovnovážna poloha nie je v bode $x = 0$, ale v bode $x = l$

poznámka o matematickom kyvadle

- teliesku na špagátiku alebo na tyčke (ktoré majú zanedbateľnú hmotnosť) sa hovorí matematické kyvadlo

- matematické kyvadlo môžeme chápať buď ako hmotný bod alebo ako tuhé teleso, pre ktoré $I = ml^2$ (prečo?)

- matematické kyvadlo je zároveň fyzikálnym kyvadlom, takže pre jeho malé kmity platí $\varphi(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ kde $\omega = \sqrt{g/l}$



veľké kmity fyzikálneho kyvadla

- ak chceme zistiť, ako vyzerajú väčšie kmity fyzikálneho kyvadla, musíme sa naučiť riešiť nelineárnu diferenciálnu rovnicu $I\,\ddot{\varphi}(t) = -\,mgl \sin \varphi(t)$
- kvôli tejto rovnici je dobré oprášiť starú dobrú metódu "krok za krokom"
- zopakujme si, čo je jadrom tejto metódy:
- uhlové zrýchlenie v n-tom kroku $\quad \varepsilon_n = -\,mgl/I \ \sin \varphi_n$
- základný (dookola opakovaný) krok

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_n\,.\,dt$$
$$\omega_{n+1} = \omega_n + \varepsilon_n\,.\,dt$$

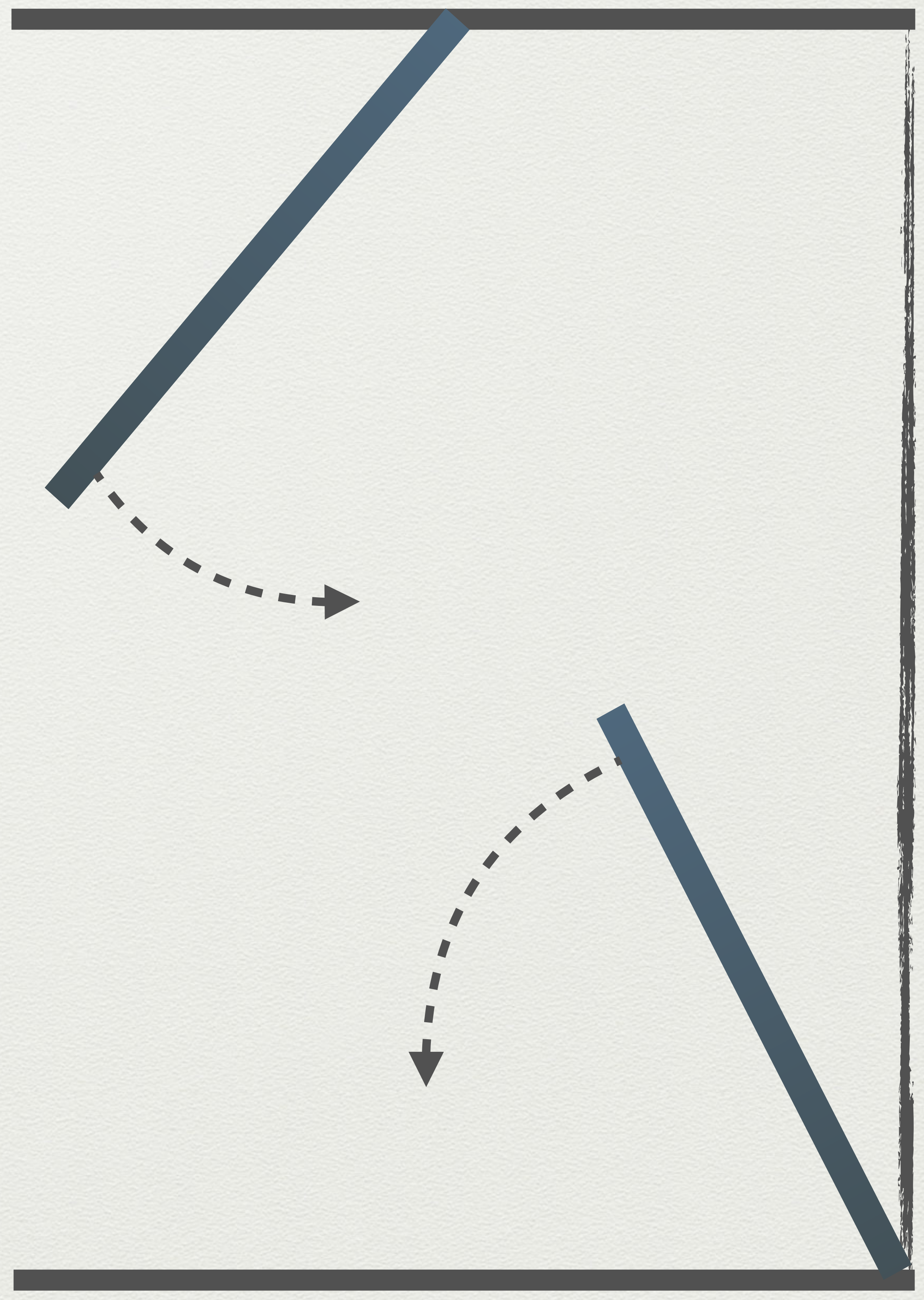
skúsme napríklad takéto otázky

metóda krok za krokom nám umožní odpovedať na takéto otázky:

- ako sa líši frekvencia veľkých kmitov konkrétneho fyzikálneho kyvadla od frekvencie jeho malých kmitov?

- ako dlho padá rebrík, ktorého spodný koniec je opretý o stenu?

- ako padá rebrík, ktorý je opretý len o podlahu (stena tam nie je)?



$L = 2\ m$ dĺžka homogénnej tyče

$m = 12\ kg$ hmotnosť tyče

$l = 1\ m$ hmotný stred od bodu závesu

$I = 16\ kg\,m^2$ moment zotrvačnosti

$g = 10\ m\,s^{-2}$

$\varphi_0 = \pi/2$ počiatočná výchylka

$\omega_0 = 0$ počiatočná rýchlosť

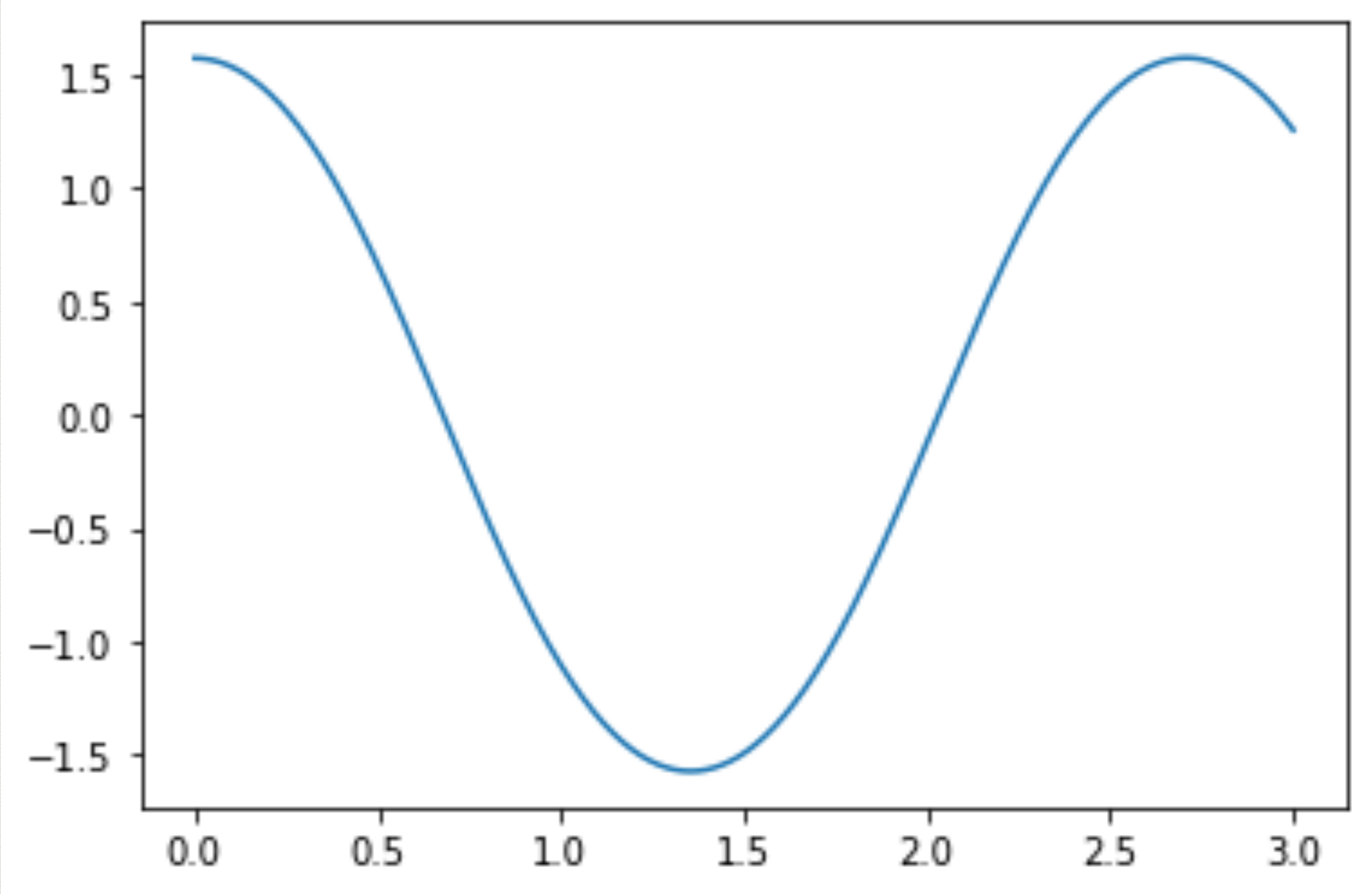
$$\varepsilon_n = -\,mgl/I\ \sin\varphi_n$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_n\,.\,dt$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \varepsilon_n\,.\,dt$$

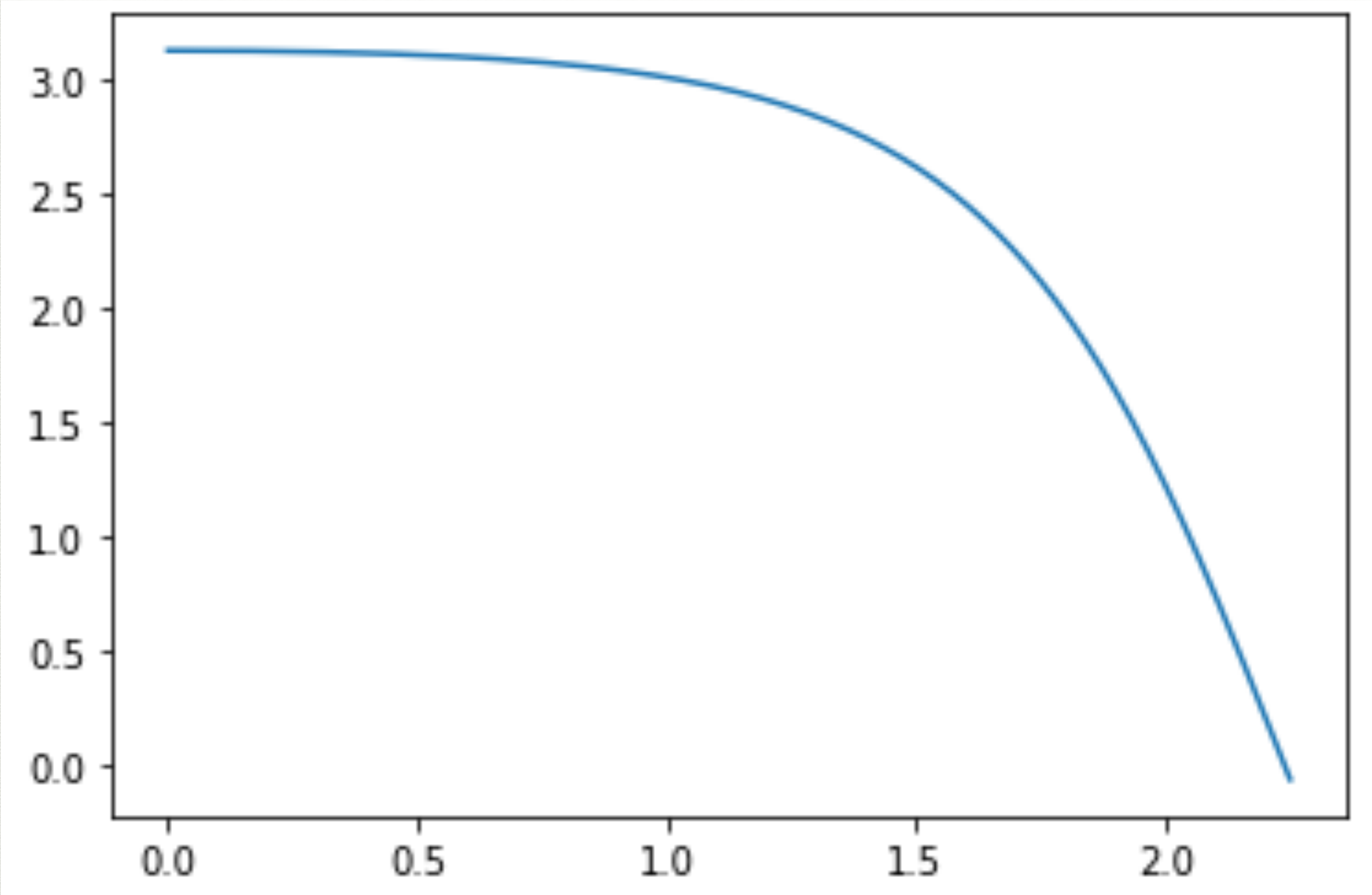
```
from pylab import *
from numpy import *

dt=0.0001
N=30000

t=empty(N+1)
phi=empty(N+1)
omega=empty(N+1)
epsilon=empty(N+1)

m = 12.
l = 1.
I = 16.
g = 10.

t[0]=0
phi[0]=pi/2
omega[0] = 0.

for n in range(0,N):
    epsilon[n] = - m*g*l*sin(phi[n])/I
    t[n+1]=t[n]+dt
    phi[n+1]=phi[n]+omega[n]*dt
    omega[n+1]=omega[n]+epsilon[n]*dt

    if abs(omega[n+1])<0.001: print(t[n+1])

plot(t,phi)
```

kmity s počiatočnou výchylkou 90°



- perióda kmitov: $T = 2.7\, s$
- pre malé kmity: $T = 2.3\, s$
- nepovinná domáca úloha: vyšetriť závislosť periódy od amlitúdy
- ak je $\varphi_0 > \pi/2$ a pohyb skúmame len po $\varphi = \pi$, tak vlastne vyšetrujeme pád tyče respektíve dosky či rebríka

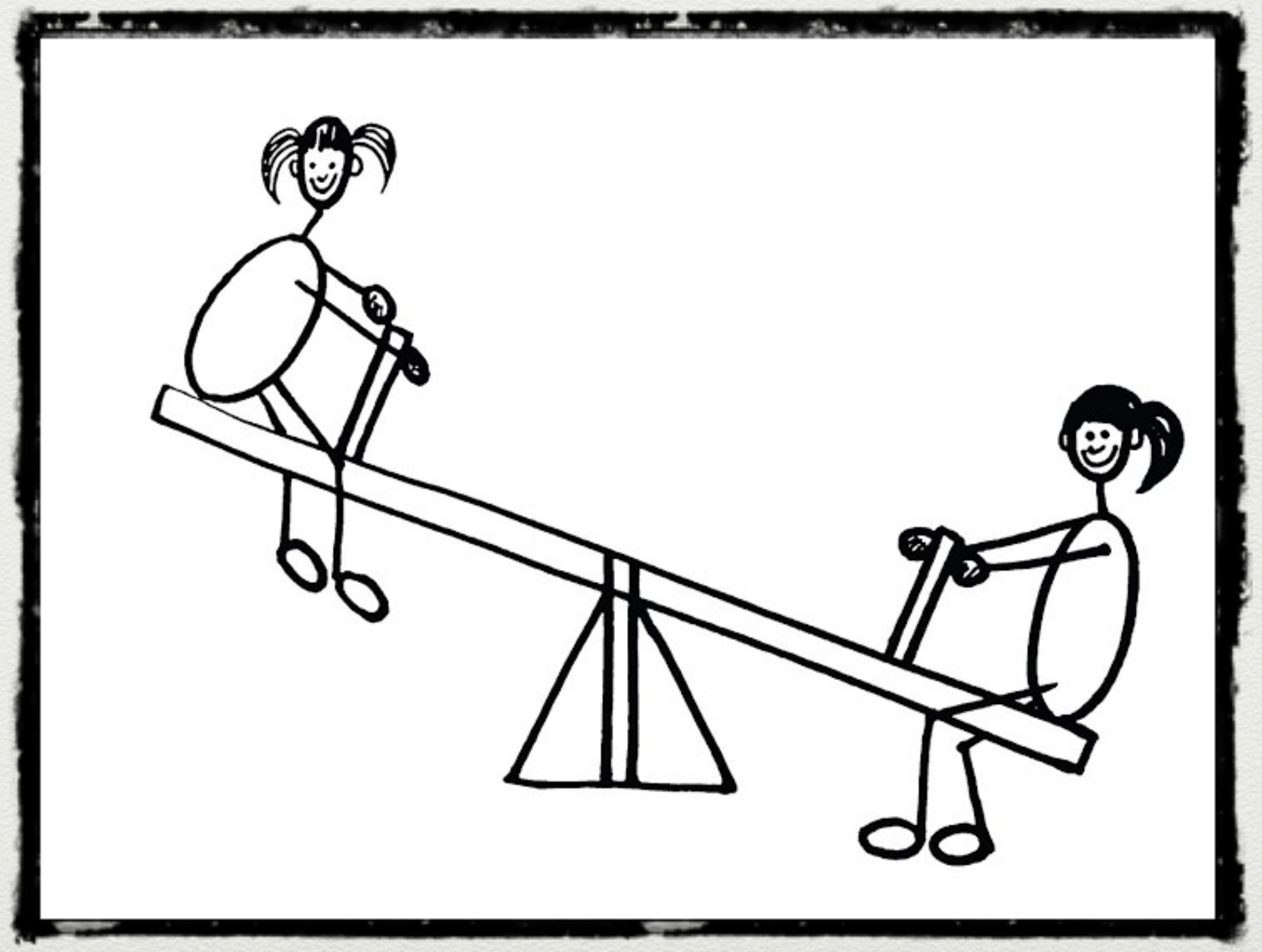
pád s počiatočnou výchylkou 179°



- doba pádu: $t = 2.24\,s$
- pre voľný pád: $t = 0.63\,s$
  ($t = \sqrt{2h/g}$ pre výšku $h = 2\,m$)
- padajúce tyče sa vyskytujú zhruba rovnako často, ako padajúce poháre
- vzorec pre dobu voľného pádu sa skúša už na strednej škole, na dobu pádu tyče sa nás nikto nepýta
  (čo je škoda, lebo ho vieme vypočítať)

poznámka k hojdačkám

- fyzikálne kyvadlo pripomína hojdačky z detských ihrísk
- ale je tu jeden významný rozdiel:
  hojdačka v skutočnosti nie je tuhé teleso
  (deti sa na hojdačke hýbu a menia svoj tvar)
- tvar sa ale zvykne prudko meniť len v bodoch obratu,
  čiže hojdačku môžeme modelovať ako tuhé teleso,
  ktoré v bodoch obratu mení svoj moment zotrvačnosti
- ak by sa tvar nemenil takmer skokom, ale skôr spojito,
  moc by sme si s mechanikou tuhého telesa nepomohli



nepovinná domáca úloha

- pre hojdačku typu swing odhadnite moment zotrvačnosti hojdačky s dieťaťom sediacim v dvoch typických polohách
- pre hojdačku typu see-saw odhadnite moment zotrvačnosti hojdačky s dvomi deťmi sediacimi v dvoch typických polohách
- napíšte program pre numerické riešenie (krok za krokom) pohybových rovníc týchto hojdačiek založený na modelovom predpoklade, že moment zotrvačnosti sa mení skokom v bode obratu
- porovnajte výsledky s tým, čo sa dá vidieť (odmerať) na detskom ihrisku