HYDRODYNAMIKA

a prečo sa jej nebudeme venovať

vediet' príliš málo

- skoro všetci vieme (prinajmenšom z gangsterských filmov), že vedieť príliš veľa môže byť pomerne nebezpečné
- mnohí sme si vedomí aj toho, že vedieť príliš málo môže byť rovnako nebezpečné
- to, čo sa dá z hydrodynamiky naučiť v prvom ročníku fyziky, je celkom určite príliš málo (pretože je príliš ťažká)
- takže sa z nej radšej naučíme ešte menej, než príliš málo

prečo je hydrodynamika ťažká

- pretože jej základná rovnica je nelineárna diferenciálna rovnica, a tie bývajú ťažké
- táto rovnica je dokonca priam ikonickým príkladom toho, aké až ťažké môžu byť nelineárne parciálne diferenciálne rovnice
- existujú situácie, kedy vieme tieto rovnice presne vyriešiť, ale to rozhodne nie sú typické a bežné situácie
- mnohé riešenia tejto rovnice opisujú takzvané turbulentné prúdenie, čo je jeden z najkomplexnejších a najmenej pochopených fyzikálnych javov

výstižný a často citovaný výrok

I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic. Horace Lamb, 1932

čo sa chceme naučiť

- ako vyzerá základná rovnica hydrodynamiky (a aerodynamiky)
- kde sa v nej berie tá nelinearita, ktorá z nej robí komplikovanú rovnicu
- aké zjednodušenia tejto rovnice sa niekedy používajú,
  do akej miery sú oprávnené, koľko fyziky v sebe obsahujú a koľko jej ignorujú
- prečo je ťažké získať cit pre to,
  nakoľko sú tieto zjednodušenia spoľahlivé a nakoľko sú ich riešenia realistické

dva opisy prúdenia tekutín

Lagrangeov opis

- opisujeme pohyb jednotlivých kúskov
- kúsky dostanú "rodné číslo" dané ich počiatočným polohovým vektorom $\vec{r}_0$
- polohový vektor kúska s rod. číslom $\vec{r}_0$ v čase t označujeme vektorom $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$ jeho rýchlosť vektorom $\overrightarrow{v}(\vec{r}_0, t)$

Eulerov opis

- opisujeme, ako sa rôzne fyz. veličiny (napríklad rýchlosť) menia s časom v danom mieste
- rýchlosť tekutiny v mieste $\vec{r}$ a v čase t opisuje funkcia $\overrightarrow{v}(\vec{r}, t)$
- toto je o dosť prehľadnejší opis

pohybová rovnica v 1D

Lagrangeov opis

- hmotnosť kúska krát jeho zrýchlenie rovná sa sile pôsobiacej na ten kúsok

$$\rho\, dV\, \frac{d\, v(x_0, t)}{dt} = F$$

- zrýchlenie je obyčajná derivácia podľa času, lebo v je funkcia len času (ktorá závisí aj od parametra "rodné číslo")

Eulerov opis

- Newtonov zákon sily má rovnaký tvar, ale zrýchlenie sa počíta inak (keďže rýchlosť je teraz funkciou polohového vektora aj času)
- na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že zrýchlenie je parciálnou deriváciou podľa času, ale to je chybný pohľad (ako hneď uvidíme)

zrýchlenie tekutiny v Eulerovom opise

- rýchlosť v mieste x v čase t , čiže $v(x,t)$, je rýchlosťou toho kúska tekutiny, ktorý sa v čase t nachádza práve v mieste x

- v čase $t + dt$ sa tento kúsok nachádza v mieste $x + v(x,t)\,.\,dt + \ldots$, kde tri bodky sú za členy vyššieho rádu malosti (pre dt idúce k nule idú k nule rýchlejšie ako dt) a má rýchlosť $v(x + v(x,t)\,.\,dt + \ldots, t + dt) = v(x,t) + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} v(x,t)\,.\,dt + \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dt + \ldots$

- zrýchlenie: $\lim\limits_{dt \to 0} \dfrac{v(x + v(x,t)\,.\,dt + \ldots, t + dt) - v(x,t)}{dt} = \boxed{\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} v(x,t) + \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}}$

- neočakávaný (ale prirodzený) a zároveň nelineárny člen je práve $v(x,t)\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)$

dva typy síl v mechanike tekutín

- pohybová rovnica v Eulerovom opise ($f = F/dV$ je hustota sily)

$$\rho(x,t)\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) = f(x,t)$$

- v mechanike tekutín (t.j. kvapalín a plynov) pôsobia (tak ako v prípade pružných telies) dva typy síl: jednak tzv. objemové sily (napríklad gravitačná alebo elmag) a jednak tzv. plošné sily, ktorými na seba pôsobia susediace časti látky
- Eulerov opis je výhodný najmä pre zápis tých plošných síl (tlaku a viskozity)

plošné sily

tlak

- sila pôsobiaca kolmo na danú plochu
- hydrodynamická rovnica, ktorá berie do úvahy len túto silu (a nie viskozitu), sa volá Eulerova rovnica
- Eulerova rovnica sa dá odvodiť aj v 1D ale skutočný praktický význam má až jej 3D verzia

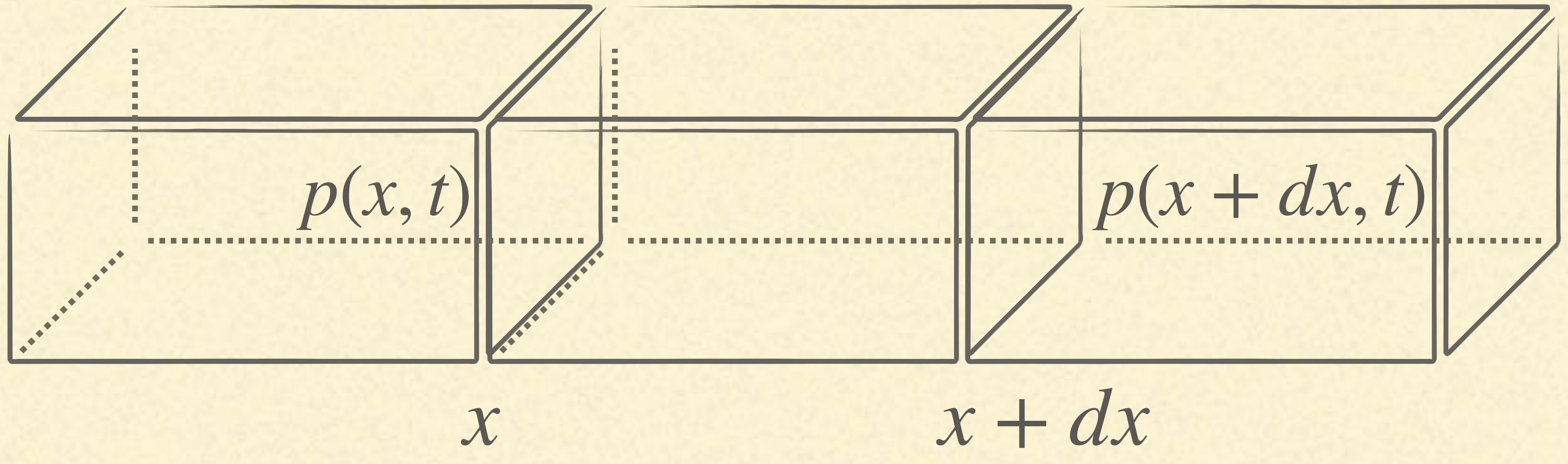
viskozita

- sila, ktorou na seba pôsobia dve susediace oblasti pohybujúce sa rôznymi rýchlosťami
- hydrodynamická rovnica, ktorá berie do úvahy tlak aj viskozitu, sa volá Navier-Stokesova rovnica
- v 1D nemá praktický zmysel, až v 3D

tlak

- tekutina uzavretá v nádobe pôsobí na steny tejto nádoby určitým tlakom, ktorý závisí od ďalších fyzikálnych veličín, ako hustota, teplota a podobne (túto závislosť vyjadruje takzvaná stavová rovnica danej tekutiny)
- Pascalov zákon: tlak v danom mieste pôsobí vo všetkých smeroch rovnako (keby to tak nebolo, "nekonečne malé" kúsky tekutiny by získali "nekonečné zrýchlenia")
- dôsledok: hydrostatický tlak $\rho g h$ (rozdiel tlakov musí vykompenzovať tiaž)
- dôsledok: Archimedov zákon (pre kváder sa nahliadne okamžite, vo všeobecnosti treba počítať integrál z tlakovej sily cez celý povrch telesa – námet na cvičenie)

Eulerova rovnica v 1D



sila zľava $S\,p(x)$

sila zprava $-S\,p(x+dx)$

$$F = -\,Sp(x+dx,t) + S\,p(x,t) = -\,S\,dx\,\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)$$

$$f = \frac{F}{dV} = -\,\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)$$

$$\boxed{\rho(x,t)\,\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) = -\,\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)}$$

Eulerova rovnica v 3D

- pre zrýchlenie dostaneme: $\overrightarrow{a}(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t)$
- často používaný zápis: $\overrightarrow{a}(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{v}\,.\,\nabla\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t)$
- symbol ∇ (hovorí sa mu nabla) predstavuje formálny vektor so zložkami $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- ak vezmeme do úvahy tlaky vo všetkých smeroch a pridáme aj gravitačnú silu:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{v}(\vec{r},t)\,.\,\nabla\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t) = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\rho(\vec{r},t)}\nabla p(\vec{r},t)}$$

d’alšie rovnice

- v Eulerovej rovnici vystupuje päť neznámych funkcií
  tri zložky rýchlosti $\overrightarrow{v}(\vec{r}, t)$, hustota $\rho(\vec{r}, t)$ a tlak $p(\vec{r}, t)$

- samotná Eulerova rovnica však predstavuje len tri rovnice (jednu, ale vektorovú)

- aby sa dalo určiť päť funkcií, treba ešte dve rovnice

- tie sa spravidla získajú zo zákona zachovania hmotnosti (platí v nerelativistickej fyzike) a zo stavovej rovnice príslušnej tekutiny (bude o nej reč v prednáškach o termodynamike) – nebudeme to tu robiť, necháme to (ako mnoho iných vecí) až na prednášku z Teoretickej mechaniky

poznámka o ideálnej kvapaline

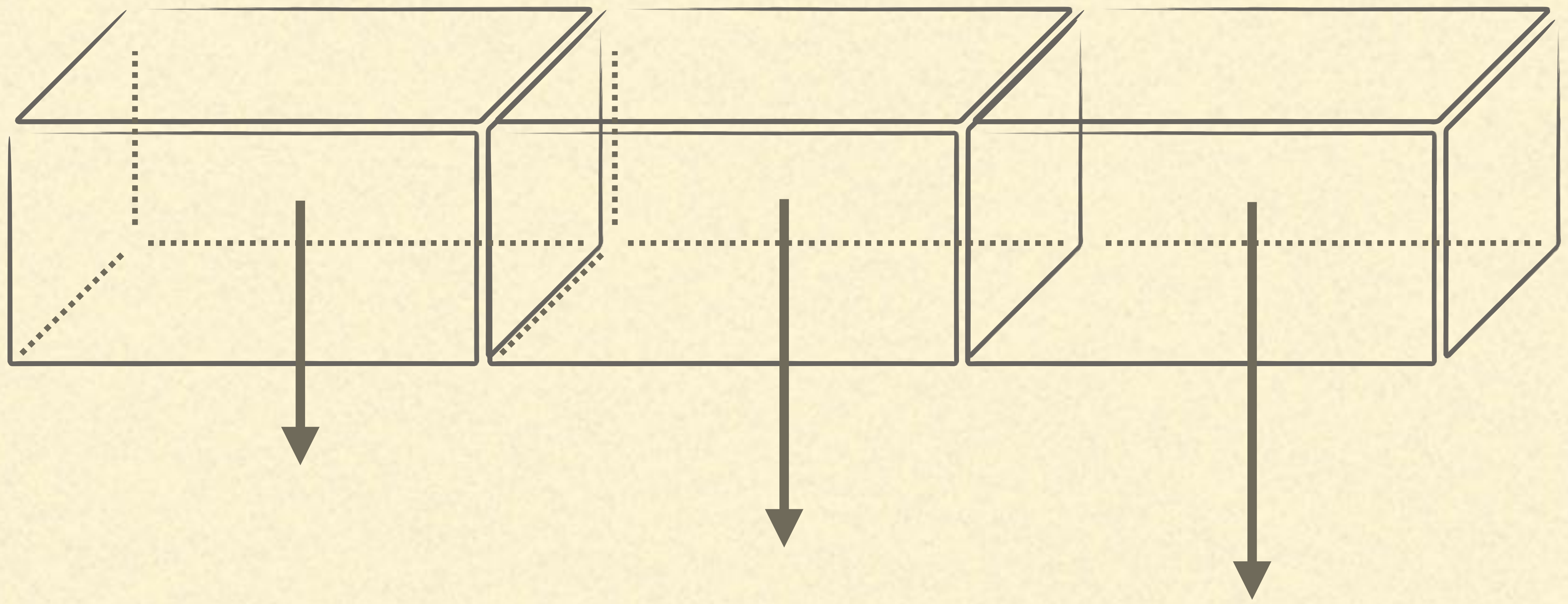
- Eulerova rovnica je rovnicou hydrodynamiky resp. aerodynamiky s uvážením tlakov, ale bez uváženia viskozity (vnútorného trenia)
- tekutine (väčšinou kvapaline) so zanedbateľnou viskozitou sa hovorí ideálna
- oveľa výstižnejší ako ideálna kvapalina je von Neumannov názov suchá voda výrazne propagovaný Feynmanom
- názov suchá voda upozorňuje na to, že ide o často značne nerealistické priblíženie (vznešený názov ideálna kvapalina tento fakt pomerne účinne skrýva a maskuje)

poznámka o Bernoulliho rovnici

- Bernoulliho rovnica je jedným zaujímavým dôsledkom Eulerovej rovnice (a preto sa týka, rovnako ako Eulerova rovnica, len nerealistickej suchej vody)

-

viskozita



- ak sa susediace kúsky tekutiny pohybujú rôznymi rýchlosťami, pôsobia na seba silou
- ak sú rozdiely rýchlostí malé, je rozumné predpokladať, že tá sila je úmerná rozdielu rýchlostí, čiže v príklade na obrázku derivácii $\partial v_z(\vec{r}, t)/\partial x$
- poznámka: tekutiny so silou úmernou tejto derivácii voláme Newtonovské tekutiny

Navier-Stokesova rovnica

- Eulerova rovnica s pridanou viskozitou
- celková viskózna sila je úmerná rozdielu derivácií, čo vedie na druhú deriváciu
- pre nestlačiteľnú tekutinu po nejakej gymnastike (bude v Teoretickej mechanike)

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{v}(\vec{r},t)\,.\,\nabla\right)\overrightarrow{v}(\vec{r},t) = \overrightarrow{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p(\vec{r},t)+\eta\,\Delta\overrightarrow{v}(\vec{r},t)}$$

kde nový trojuholník Δ sa volá laplacián a je definovaný takto: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- toto je Navier-Stokesova rovnica pre nestlačiteľnú tekutinu

dôležitost' Navier-Stokesovej rovnice

- opisuje hydrodynamiku všemožných tečení a obtekaní
- opisuje aerodynamiku (verzia pre stlačiteľnú tekutinu) áut, lietadiel, …
- opisuje počasie (spolu s ďalšími rovnicami)
- aká škoda, že z matematického hľadiska má toľko nepríjemných vlastností
- nevieme ani len dokázať, že má (alebo že nemá) rozumné riešenia a že tieto riešenia sú (alebo nie sú) jednoznačné

jeden zo 7 miléniových problémov

- sedem najväčších výziev pre matematiku 21. stor.
- podľa vzoru Hilbertových problémov pre 20. stor.
- za vyriešenie každého z týchto 7 problémov je vypísaná odmena milión dolárov (vyriešený je jeden)

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.