Newtonov gravitačný zákon

prvé veľké zjednotenie

mechanika 4

zákon sily

$$\overrightarrow{F} = m \,.\, \overrightarrow{a}$$

Hovorí nám, aké je zrýchlenie telesa a z tejto informácie vieme vypočítať (napríklad metódou krok za krokom) aký je celý pohyb.

zákony pre sily

$$\overrightarrow{F} = \ldots$$

Hovoria nám, aké sily pôsobia na teleso v rôznych situáciách. Bez znalosti týchto zákonov by sme nevedeli, aké sily máme dosadiť do zákona sily.

Aké sily existujú?

gravitačná

elektrická

magnetická

trenie

kontaktná

elastická

odpor prostredia

vztlaková

jadrová

Niektoré sú základné, iné z nich odvodené

Koľko je základných síl?
(presnejšie povedané interakcií)

z dnešného pohľadu sú základné interakcie štyri (tri)

- gravitačná — vesmír
- elektromagnetická — všetko
- slabá jadrová
- silná jadrová — atómové jadrá

elektroslabá

Štyri. Tri! Dve? Jedna?

- gravitačná
- elektroslabá ✓
- silná jadrová

veľké zjednotenie ?

superstruny ?

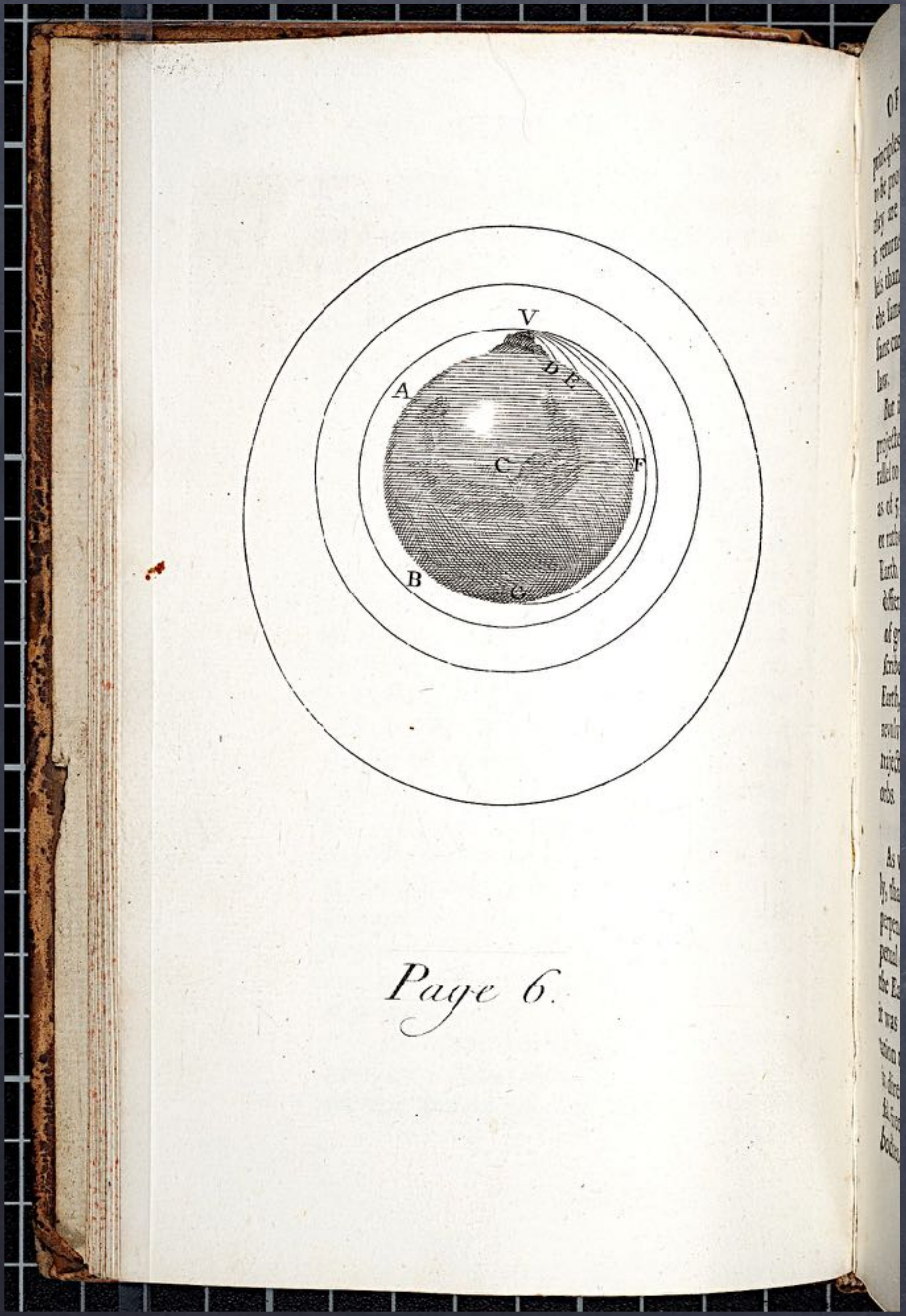
Prečo si myslíme, že by to mohlo ísť?

Pretože v histórii fyziky sa to stalo už veľakrát.

Veľké zjednotenia v dejinách fyziky

pozemská a nebeská mechanika	Newton
elektrina a magnetizmus	Faraday
elektromagnetizmus a optika	Maxwell
mechanika a termodynamika	Boltzman, Gibbs
gravitácia a geometria	Einstein
slabé a elektromagnetické sily	Weinberg, Salam

Newtonove zjednotenie (myšlienkový experiment)

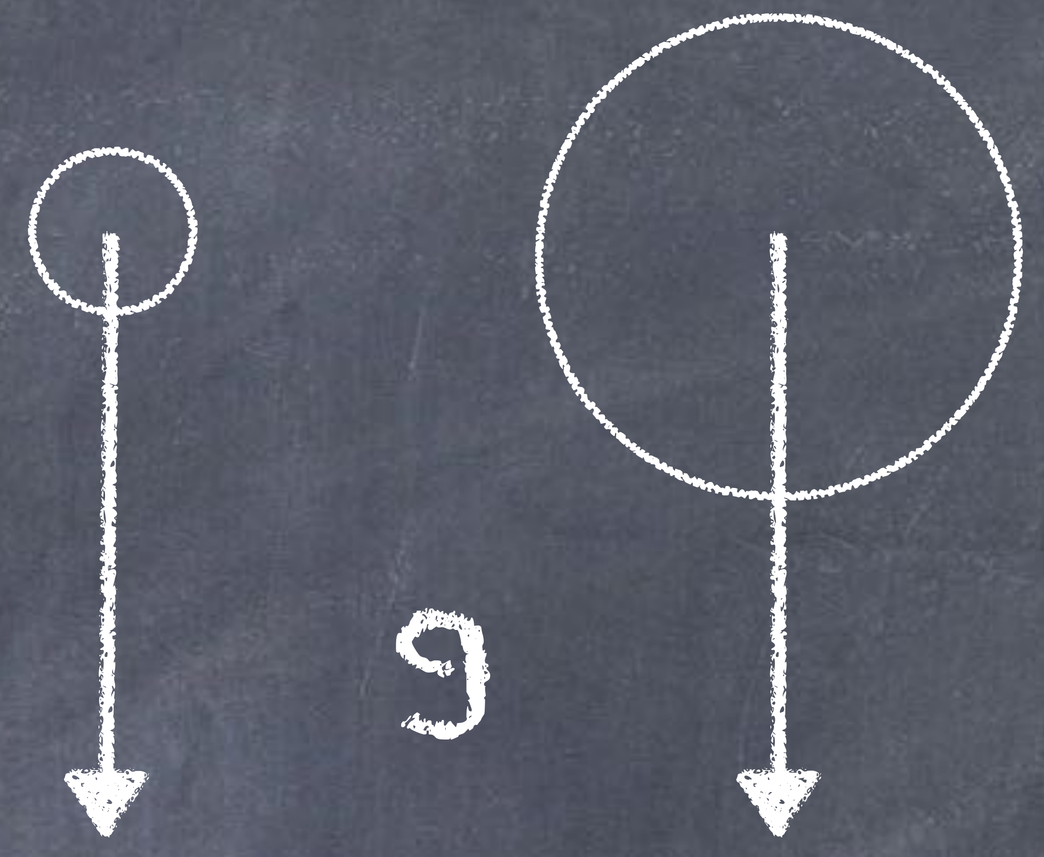


Pojednanie o systéme sveta, 1728

Ak budeme z veľmi vysokej hory strieľať z dela guľu stále väčšou rýchlosťou, bude dostrel čoraz väčší. Pri určitej počiatočnej rýchlosti (dnes jej hovoríme prvá kozmická rýchlosť) obletí delová guľa celú zemeguľu. V dôsledku gravitačnej sily sa teda bude chovať ako nízko letiaci satelit. Nie je aj pohyb iného satelitu (Mesiaca) takýmto pohybom? Inými slovami, nie je pohyb Mesiaca vlastne spôsobovaný rovnakou silou, ako pád jablka?

Aká je gravitačná sila?

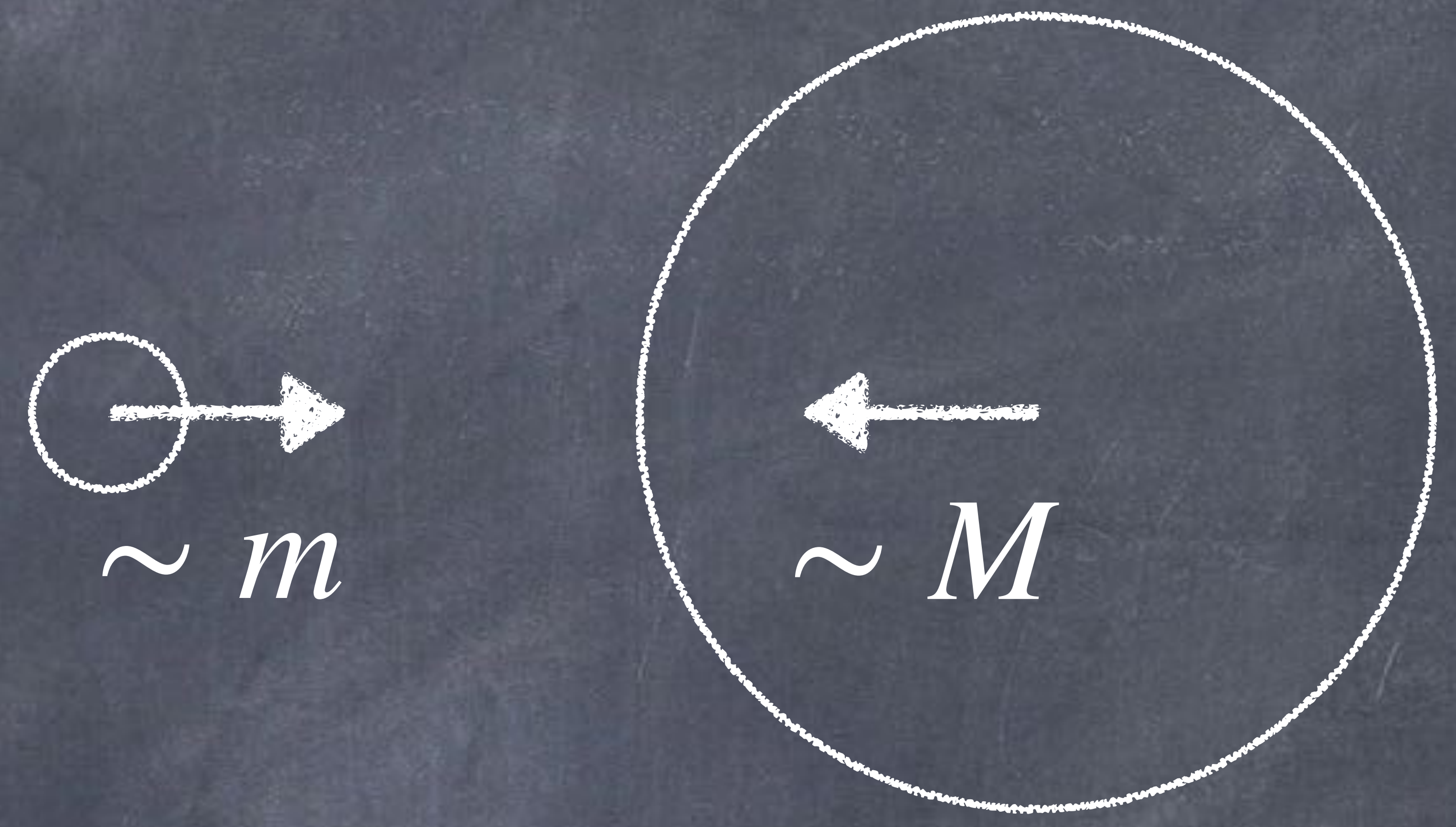
- Už od Galilea vieme toto: príťažlivá (gravitačná) sila Zeme je taká, že rôzne telesá (čiže s rôznymi hmotnosťami) padajú s rovnakým zrýchlením
- Aké musí byť F, aby a = F/m bolo rovnaké pre rôzne m?
- Sila musí byť úmerná hmotnosti (aby sa hmotnosť vykrátila)



$$F \sim m$$

Aká je gravitačná sila? II

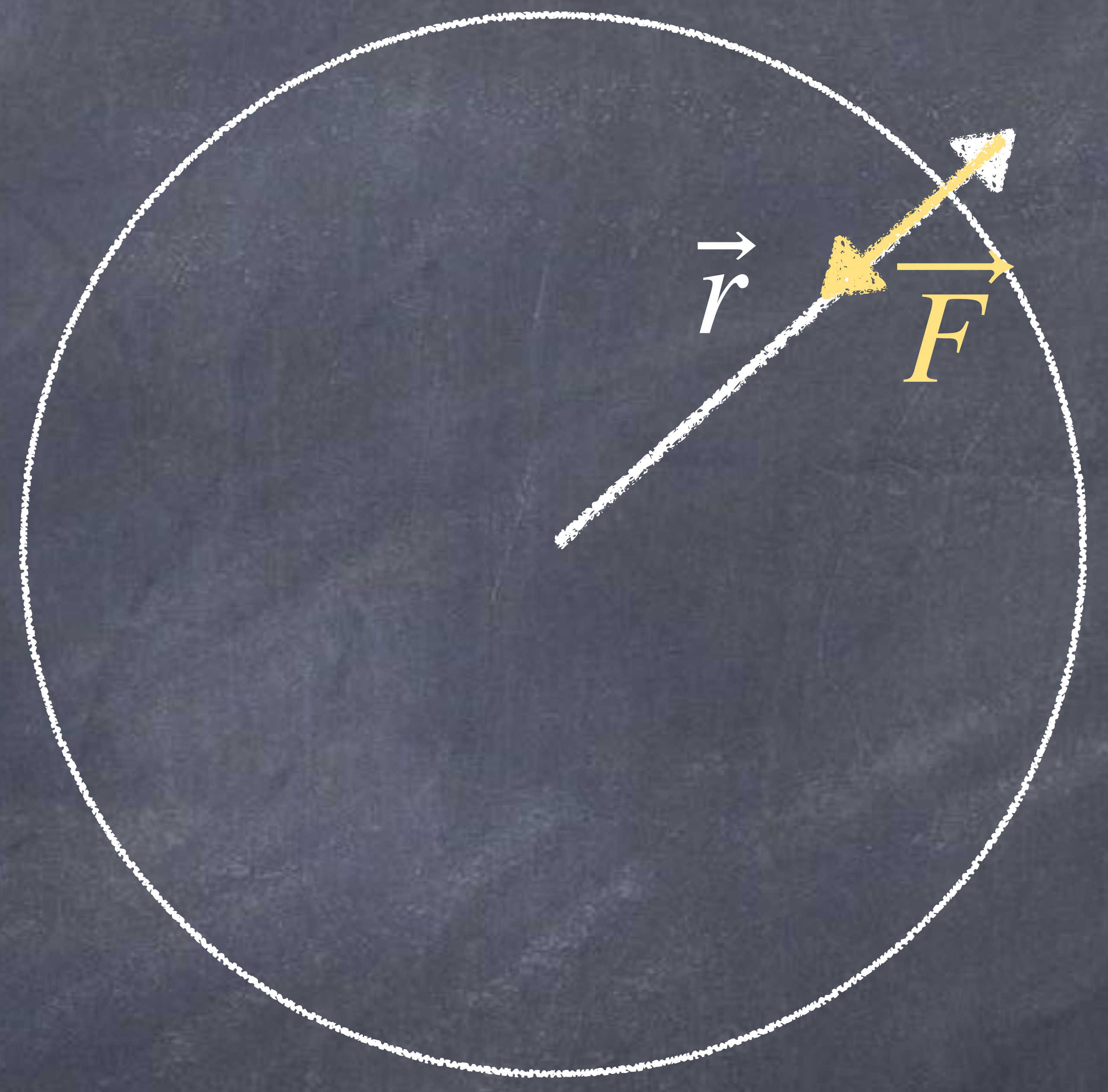
- Zo zákona akcie a reakcie (3. Newtonov zákon) vyplýva, že aj teleso pôsobí na Zem, a to rovnako veľkou silou
- Táto sila by mala byť úmerná hmotnosti Zeme (teraz je Zem tá priťahovaná)
- No a z rovnosti veľkostí akcie a reakcie nakoniec dostávame, že gravitačná sila je úmerná súčinu hmotností (premyslite si)



$$F \sim M \, . \, m$$

Aká je gravitačná sila? III

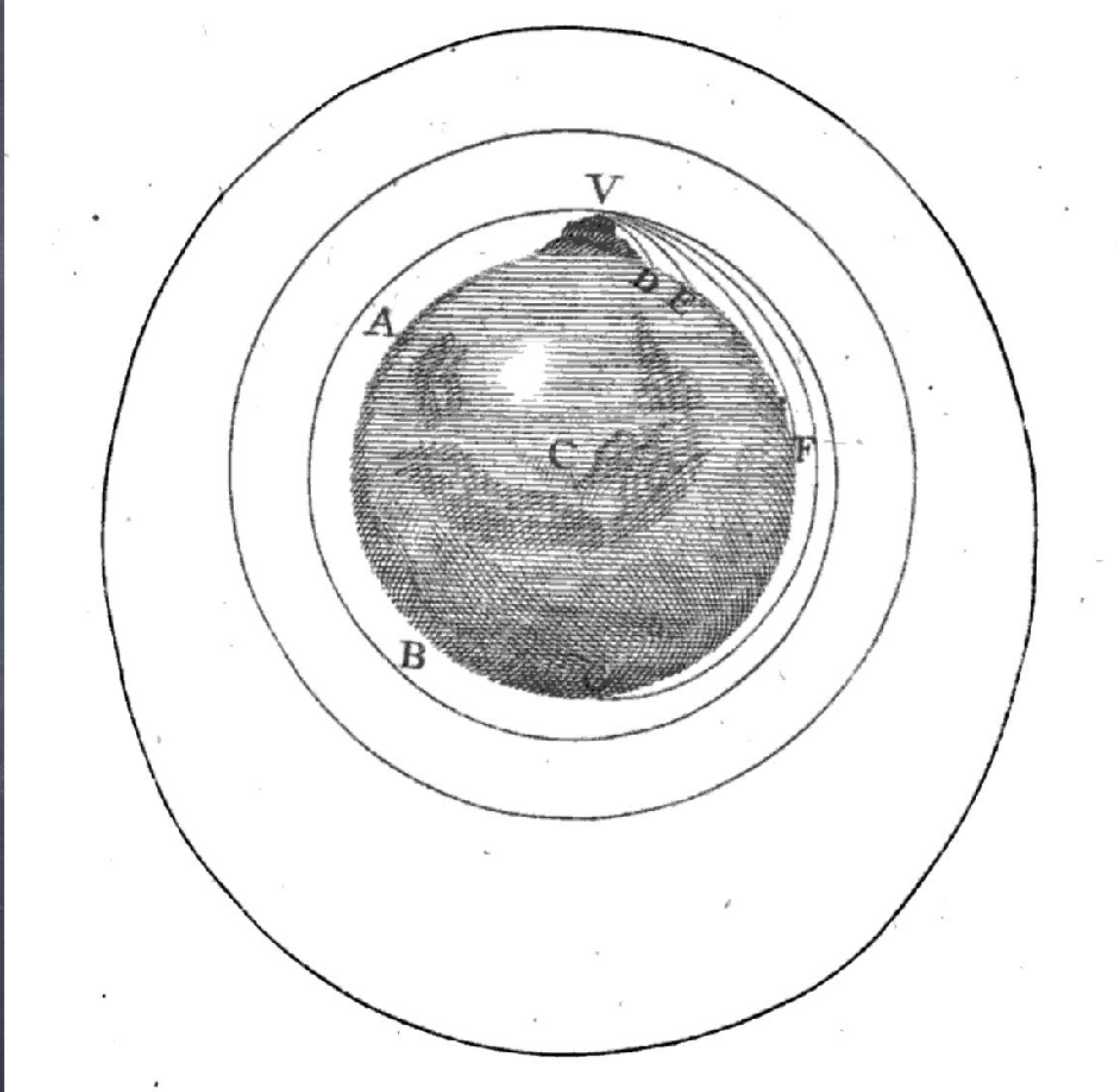
- Aký je smer gravitačnej sily? Do stredu Zeme. (Len to sa nám na povrchu Zeme bude všade javiť ako kolmo dolu.)
- Polohový vektor vzhľadom ku stredu Zeme smeruje od tohto stredu, takže $\vec{F}$ má smer ako $-\vec{r}$
- U Galilea nezávisela sila od výšky, takže by nemala závisieť od veľkosti polohového vektora



$$\vec{F} \sim -M.m\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Naozaj platí $\overrightarrow{F} = -k\,.\,M\,.\,m\,\frac{\vec{r}}{r}$?

- Predstavuje práve táto sila zjednotenie pozemskej a nebeskej mechaniky?
- Dostaneme pomocou nej naozaj Newtonov obrázok?
- Skúsme to vyšetriť našou metódou "krok za krokom"



drobná poznámka

- na to, aby sme zistili, že náš tip pre gravitačnú silu nie je správny, vlastne nepotrebujeme metódu "krok za krokom"
- stačí, ak poznáme
  - vzdialenosť r Mesiaca od Zeme (poznali už starí Gréci)
  - rýchlosť v jeho obehu (vypočítame z r a doby obehu: $v = \frac{2\pi r}{T}$)
  - dostredivé zrýchlenie $a = \frac{v^2}{r}$ (poznáme zo strednej školy)

  a dostaneme zrýchlenie veľmi odlišné od nášho g
- metóda "krok za krokom" nám však dá oveľa viac

číselné hodnoty

- Polomer Zeme $R_Z = 6\ 371\ 000$ m
- Súčin k.M $F = k\, M\, m$

  $a = F/m = k\, M$

a zároveň vieme, že $a = g = 9.81\ m/s^2$ (experimentálny fakt)

čiže $k\, M = g$

$$\overrightarrow{a} = -\,g\,\frac{\vec{r}}{r}$$

- počiatočné podmienky:

$x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = 1.1\ R_z$

$vx_0 = 5000$ $\quad$ $vy_0 = 0$

- počítanie

$r_n = \mathrm{sqrt}\ (\ x_n^2 + y_n^2\ )$

$ax_n = -\ g\ x_n\ /\ r_n$

$ay_n = -\ g\ y_n\ /\ r_n$

$x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

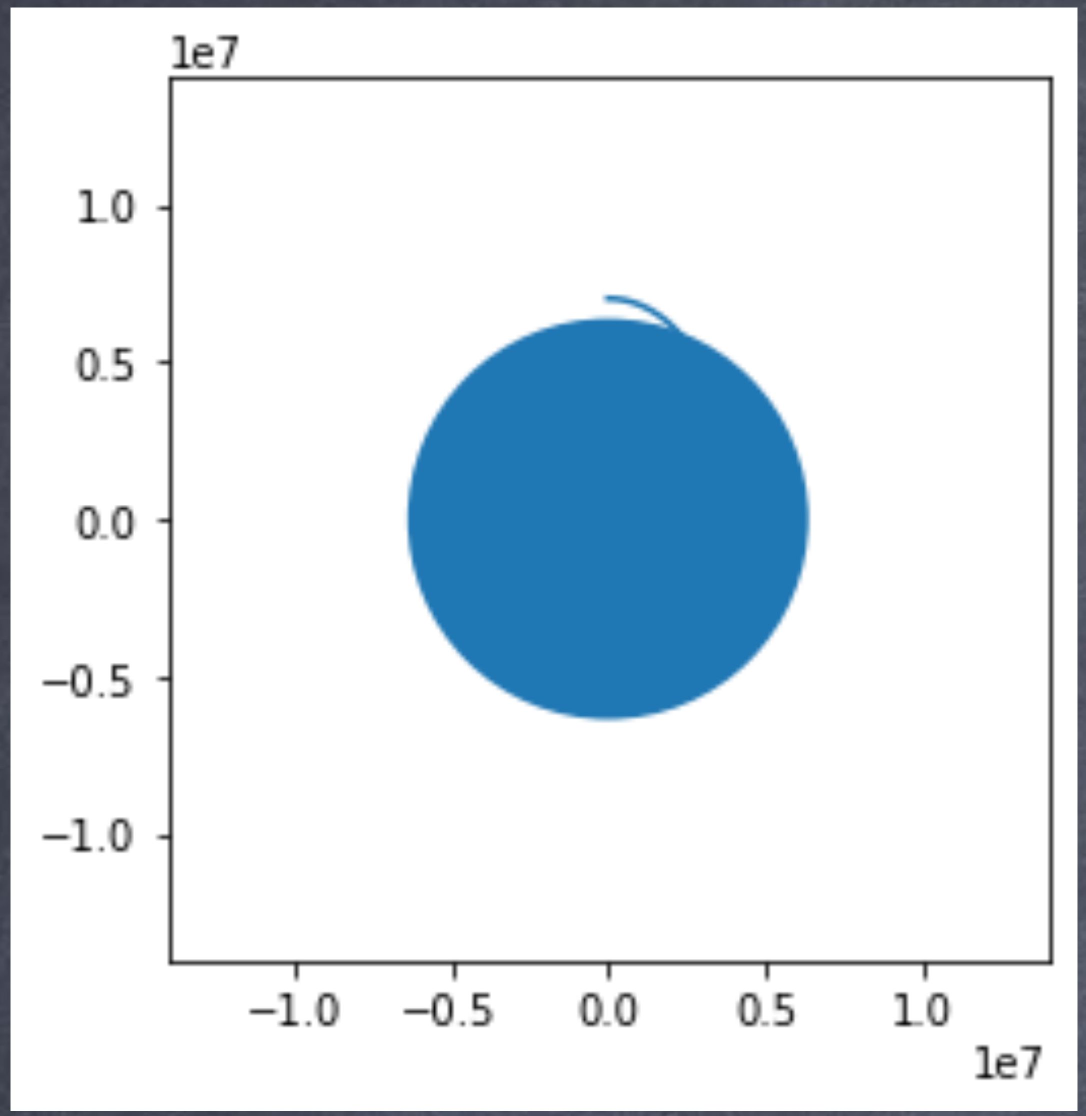
$y_{n+1} = y_n + vy_n * dt$

$vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

$vy_{n+1} = vy_n + ay_n * dt$

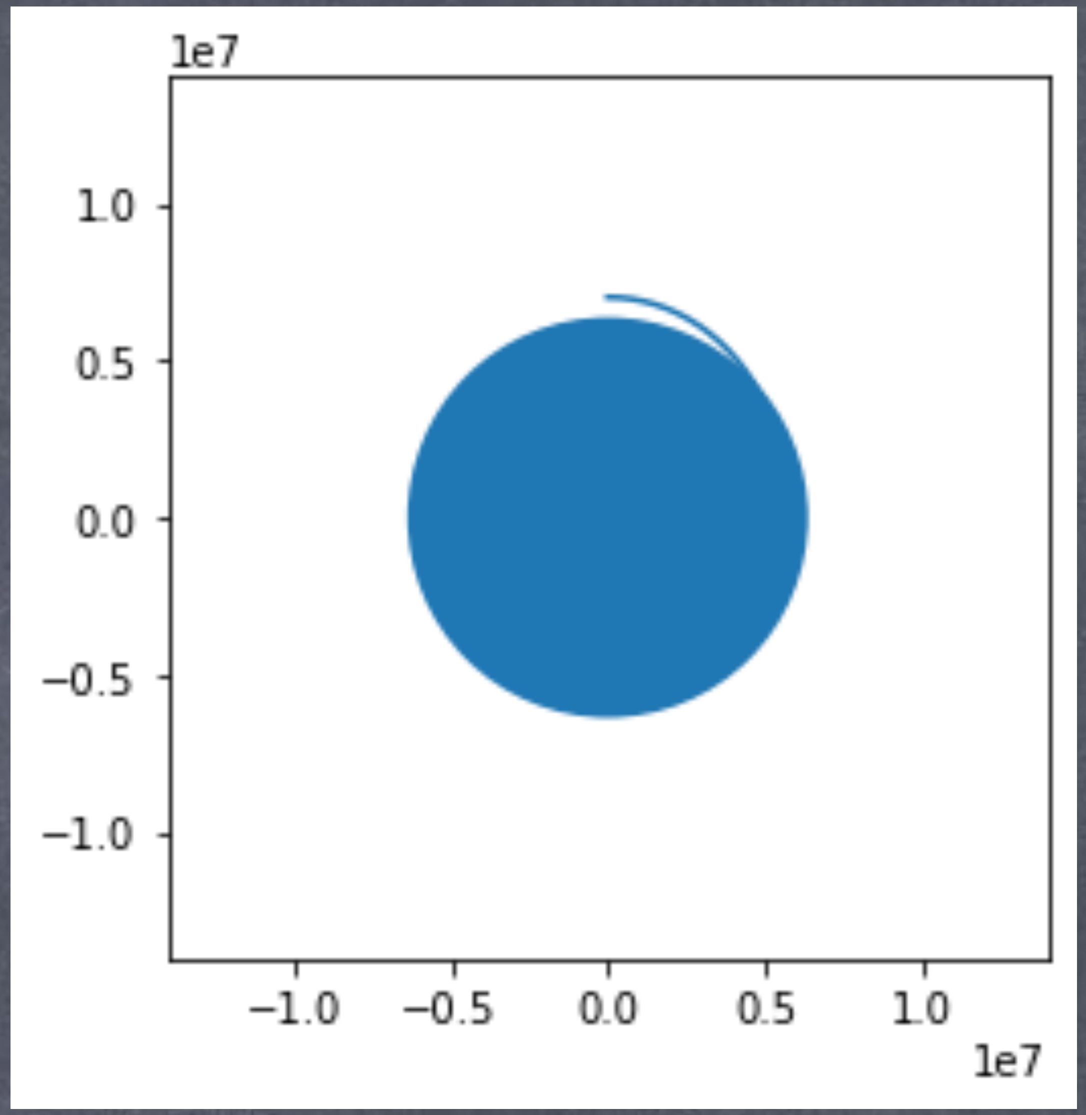
```
from pylab import *

dt=1
N=1000

g=9.81
Rz=6371000.

x=empty(N+1)
y=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vy=empty(N+1)
r=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
ay=empty(N+1)

x[0]=0.
y[0]=1.1*Rz
vx[0] = 5000.
vy[0] = 0.

for n in range(0,N):
    r[n]=sqrt(x[n]*x[n] + y[n]*y[n])
    ax[n]=-g*x[n]/r[n]
    ay[n]=-g*y[n]/r[n]

    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    y[n+1]=y[n]+vy[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vy[n+1]=vy[n]+ay[n]*dt

plot(x,y)
```

výsledky



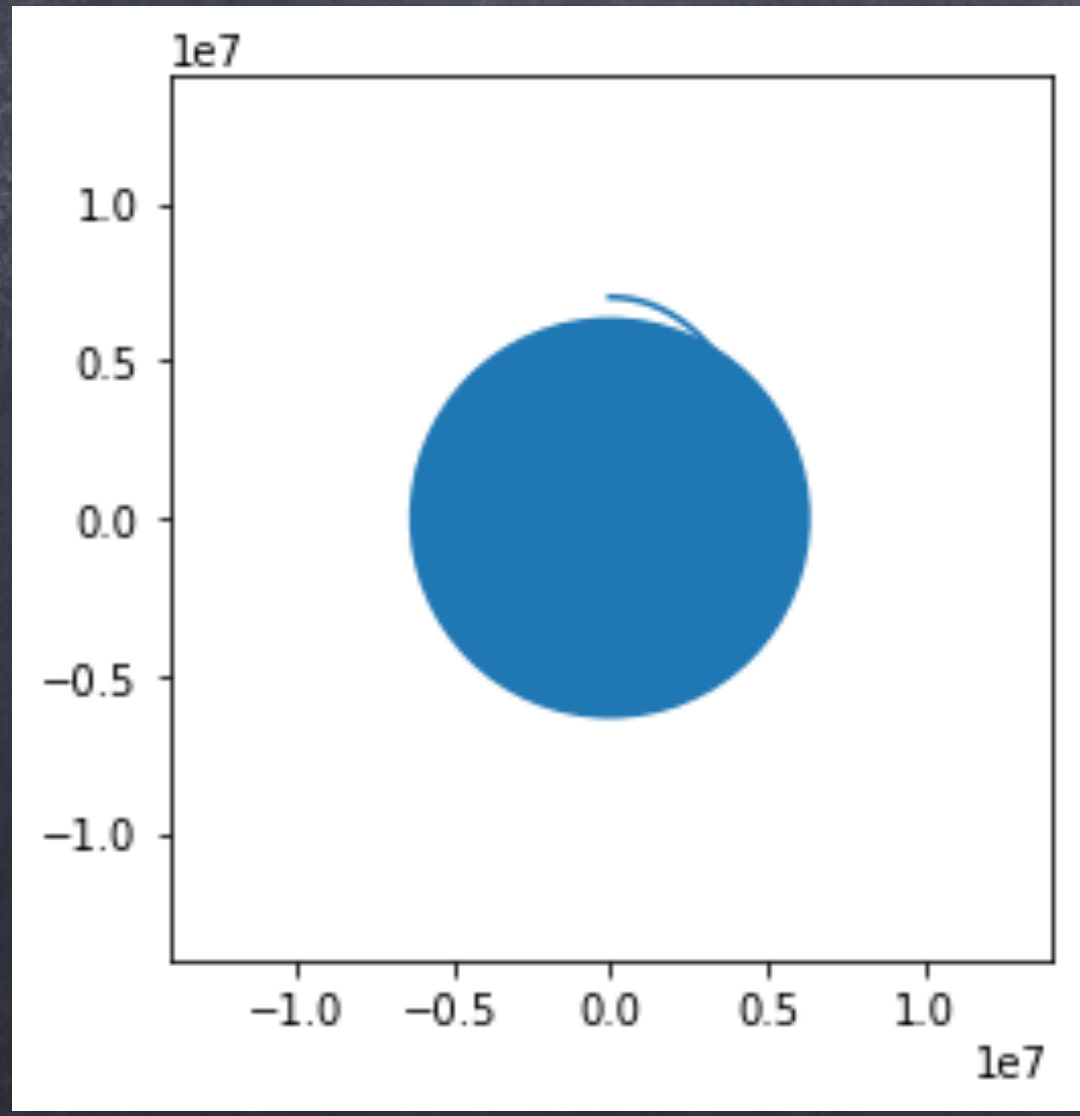
v0 = 5000 m/s

T = 459 s



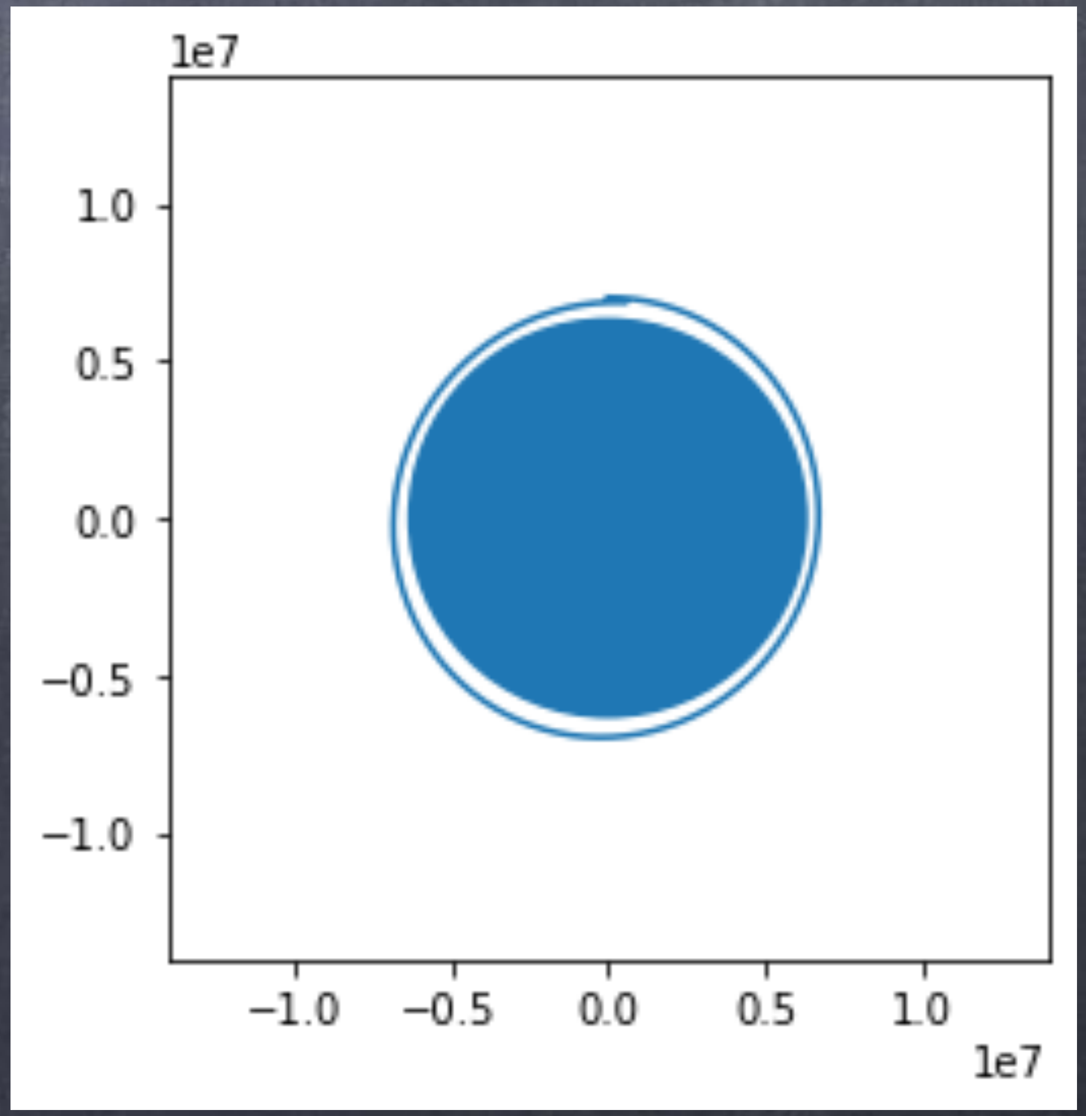
v0 = 7000 m/s

T = 724 s



v0 = 6000 m/s

T = 538 s

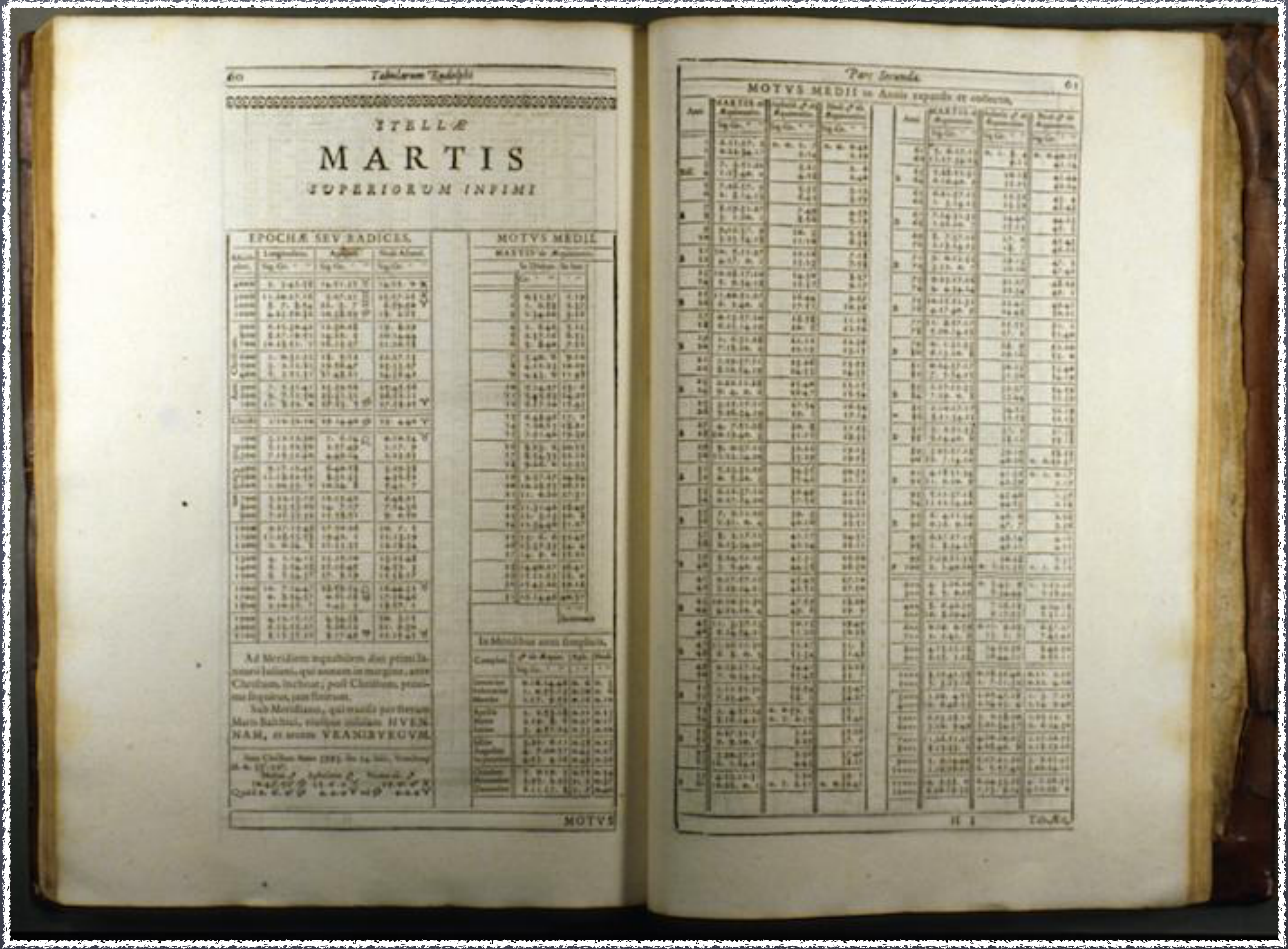


v0 = 8000 m/s

T = 5232 s

Obrázok je OK, ale film nie

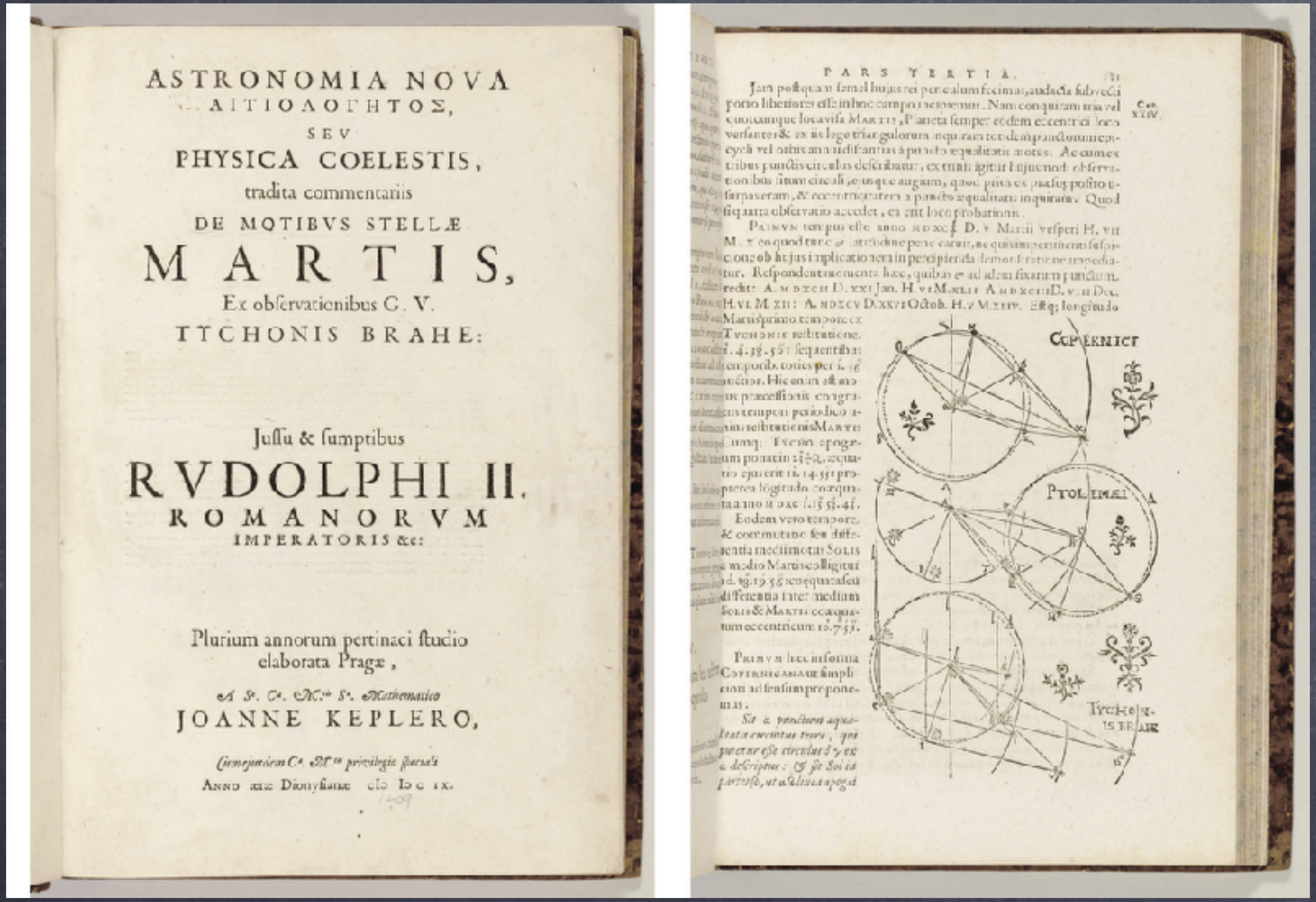
- Veci sa totiž značne pokazia, ak vezmeme do úvahy aj čas (čiže ak si všímame nielen trajektóriu, ale celý pohyb)
- Film v 17. storočí nemali, ale mali astronomické tabuľky, ktoré hovorili, kde sa kedy nachádzali planéty. Vtedajší blockbuster: Rudolfínske tabuľky, ktoré na základe presných meraní Tycha Brahe zostavil Johannes Kepler.



Johannes Kepler (1571-1630) bol cisárskym matematikom na dvore Rudolfa II. v Prahe. Jeho najväčším objavom boli kvantivatívne detaily týkajúce sa pohybu planét, známe ako tri Keplerove zákony. Práve na základe týchto zákonov objavil Newton všeobecný zákon gravitácie.

súčasník
Galileo Galilei

Dve dôležité knihy



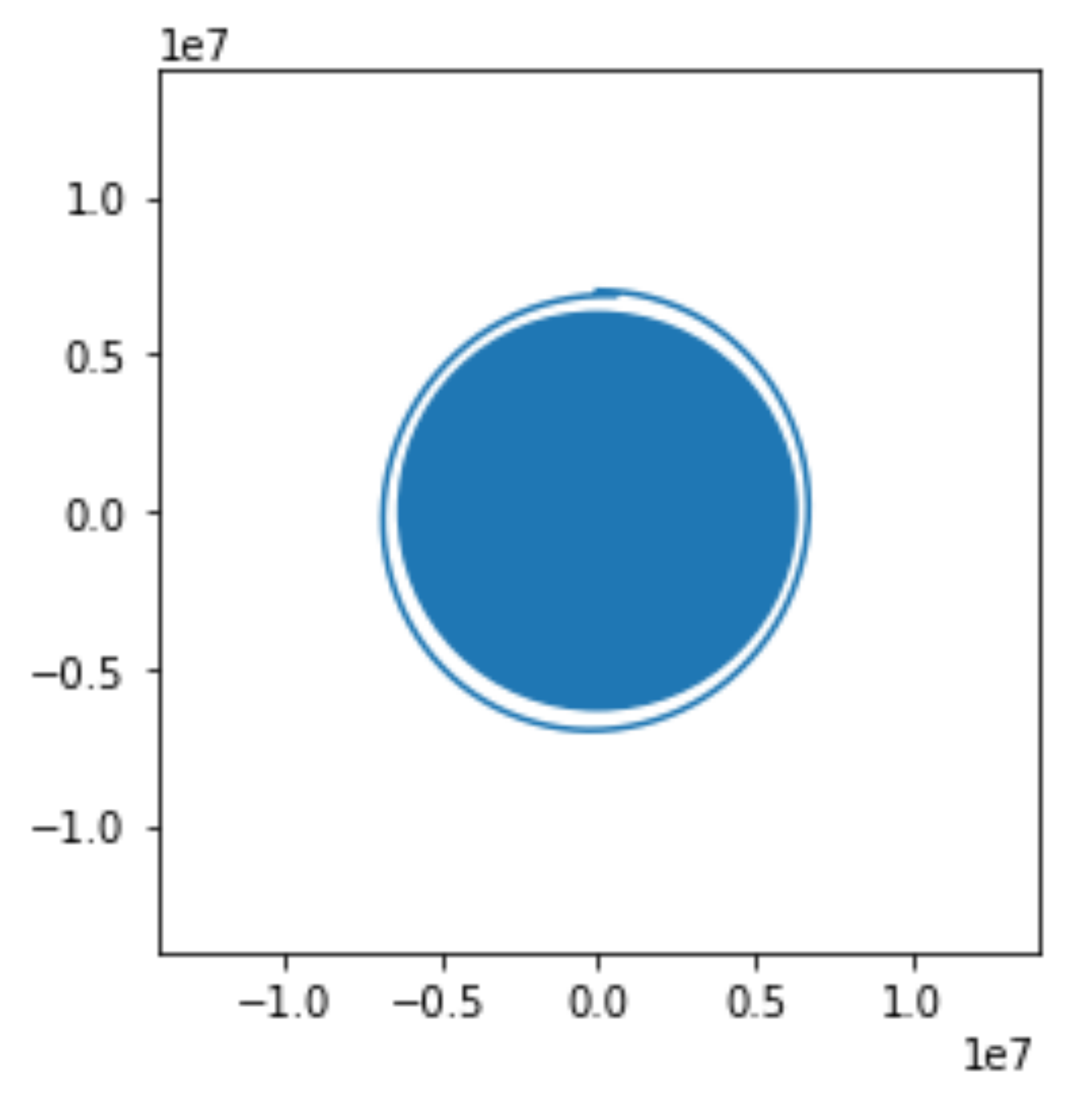
Nová astronómia, 1609
prvý a druhý zákon

Harmónia sveta, 1619
tretí zákon

Keplerove zákony

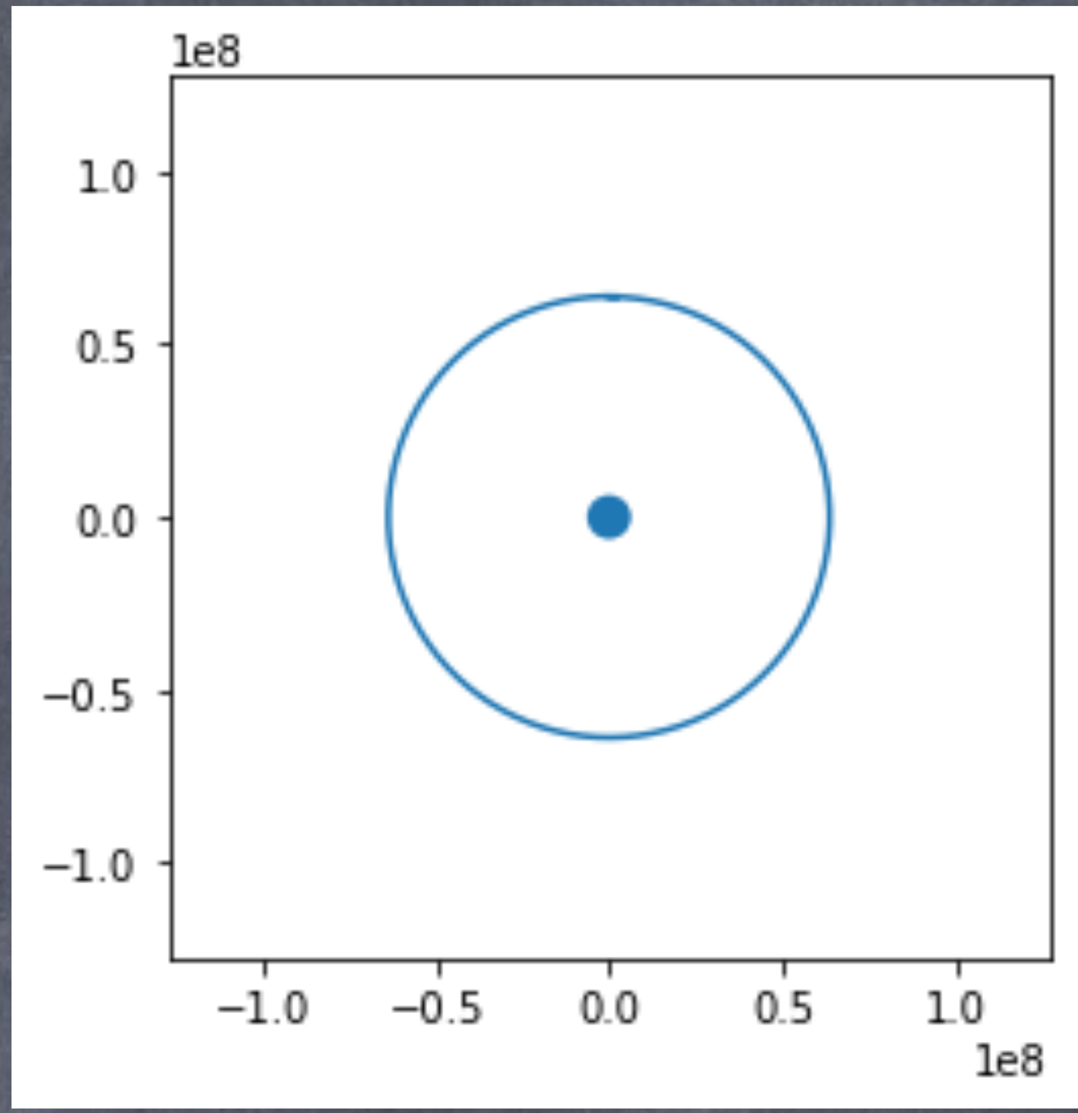
- Každá planéta obieha okolo Slnka po elipse (blízkej kružnici). Slnko sa nachádza v jednom z ohnísk elipsy.
- Spojnica planéty so Slnkom "vymetie" za rovnaké časy rovnaké plochy.
- Pomer druhých mocnín obežných dôb dvoch planét je rovný pomeru tretích mocnín ich vzdialeností od Slnka.

výsledky



y0 = 1.1 Rz
v0 = 8000 m/s
T = 5232 s

y0 = 10 Rz
v0 = 25000 m/s
T = 16018 s



$$\left(\frac{10}{1.1}\right)^3 \simeq 1000 \neq 10 \simeq \left(\frac{16018}{5232}\right)^2$$

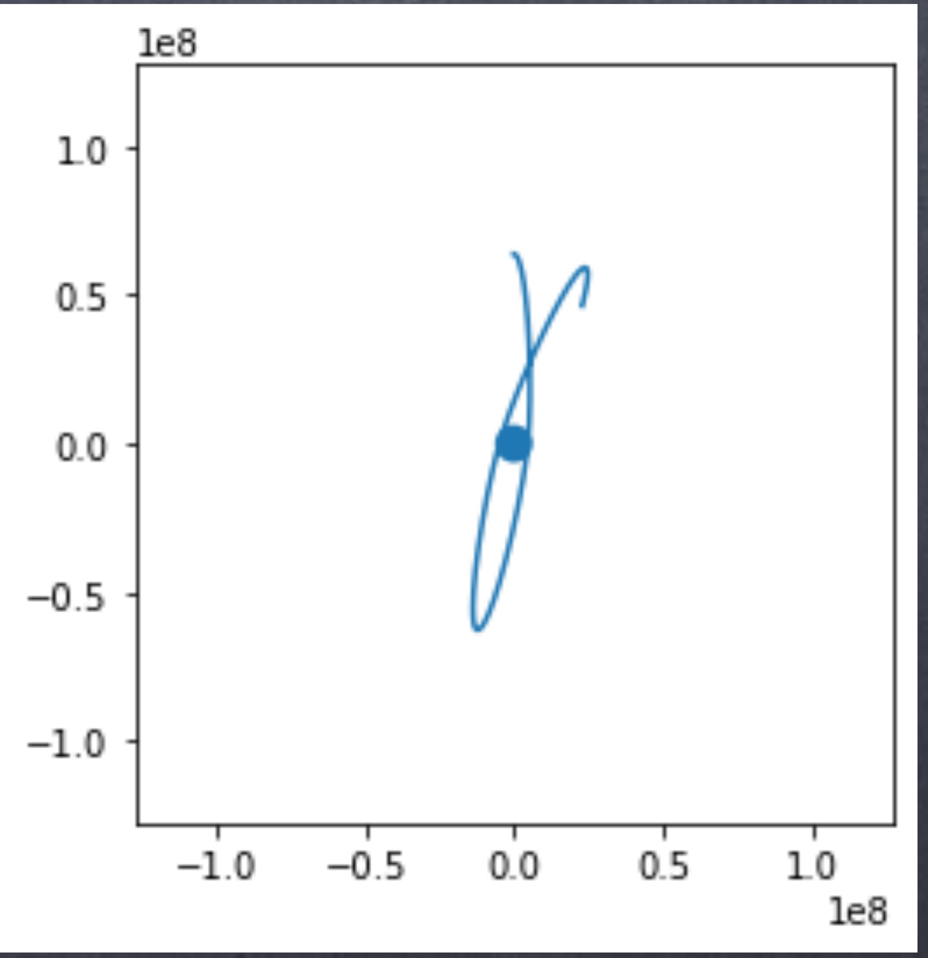
Naša sila vôbec nedáva tretí Keplerov zákon.
Takto zjednotenie pozemskej a nebeskej mechaniky v našom svete vyzerať nemôže.

V čom je problém?

- Vzdialenejšia planéta nám ide príliš rýchlo.
- Potrebovali by sme pre ňu desaťkrát dlhšiu obežnú dobu, čiže desaťkrát menšiu rýchlosť.

$$\left(\frac{160000}{5232}\right)^2 \cong 1000$$

- Lenže pri danom zrýchlení by bola pri menšej rýchlosti dráha oveľa viac zakrivovaná.



- Zdá sa, že vzdialenejšia planéta potrebuje menšie zrýchlenie. Ta znamená, že potrebujeme zrýchlenie (a teda silu) klesajúce s rastúcou vzdialenosťou.

Ako rýchlo klesá grav. sila?

- Keď nemáme nič lepšie, vždy sa dá skúsiť metóda pokus-omyl.
- Skúšajme nejaké jednoduché klesajúce fnkcie r a počítajme, či nám niektorá z nich dá tretí Keplerov zákon
- Asi najjednoduchšia možnosť je nepriama úmera F~1/r, čiže

$$\overrightarrow{F} = -K\,\frac{M.m}{r}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

- Číselnú hodnotu konštanty K dostaneme zo známeho gravitačného zrýchlenia na povrchu Zeme g = K.M/Rz
- Vidíme, že nedostaneme K, ale súčin K.M, čo nám stačí

K.M = g.Rz

?

Neodporuje to Galileovi?

- Galileo nepozoroval závislosť gravitačného zrýchlenia od výšky. My teraz predpokladáme, že sa s výškou mení. Nie je to rozpor?
- Nie je. Galileo robil pokusy pre výšky na úrovni max. desiatok metrov. Na takých vzdialenostiach sa nami predpokladaná závislosť zrýchlenia od výšky prakticky vôbec neprejaví (t. j. neprejaví sa merateľným spôsobom).

- počiatočné podmienky:

  $x_0 = 0$ $\quad$ $y_0 = 10\ R_z$

  $vx_0 = 2500$ $\quad$ $vy_0 = 0$

- počítanie

  $r_n = \mathrm{sqrt}\ (\ x_n{}^2 + y_n{}^2\ )$

  $ax_n = -\ g\ Rz\ x_n\ /\ (r_n * r_n)$

  $ay_n = -\ g\ Rz\ y_n\ /\ (r_n * r_n)$

  $x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

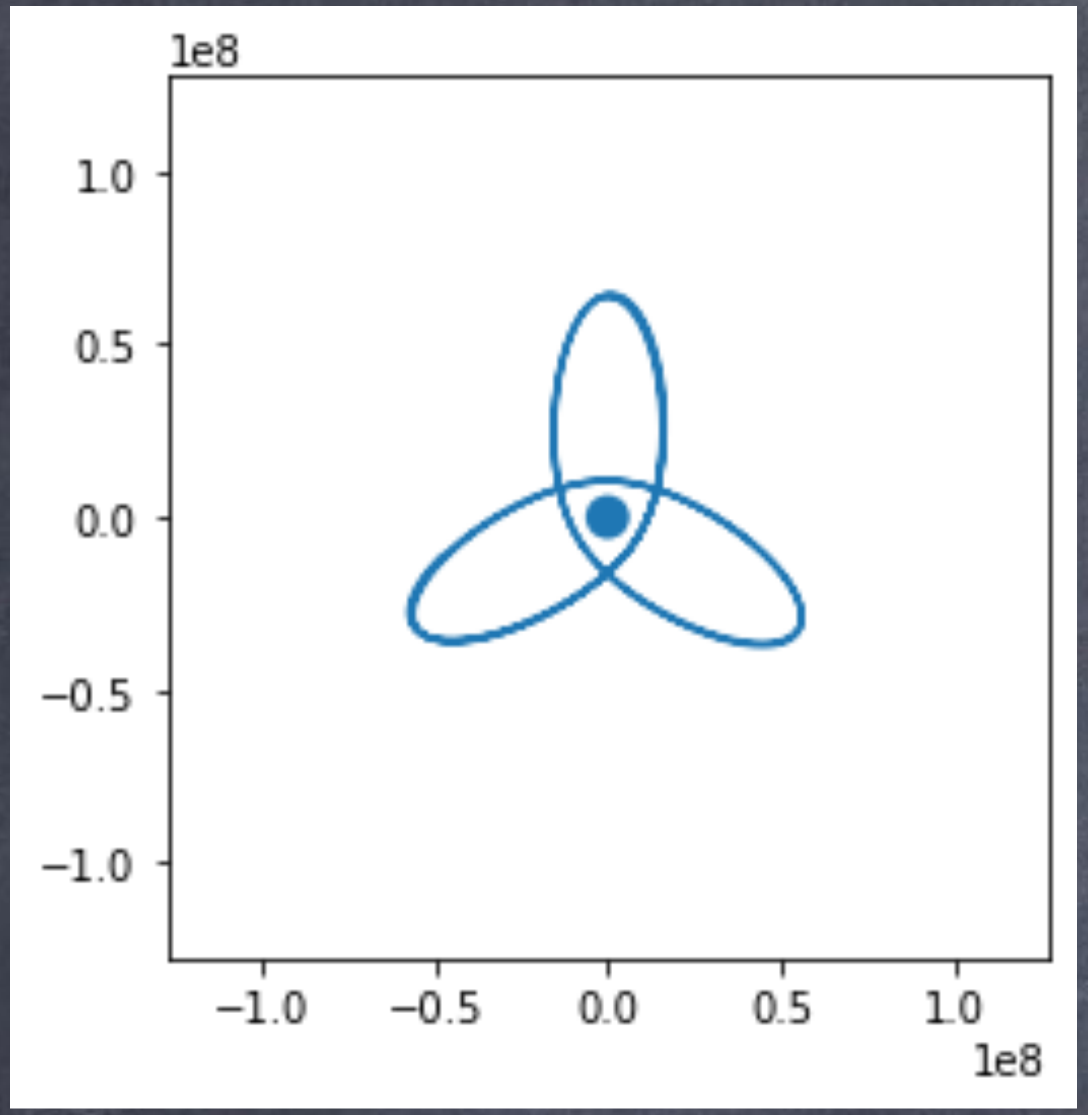
  $y_{n+1} = y_n + vy_n * dt$

  $vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

  $vy_{n+1} = vy_n + ay_n * dt$

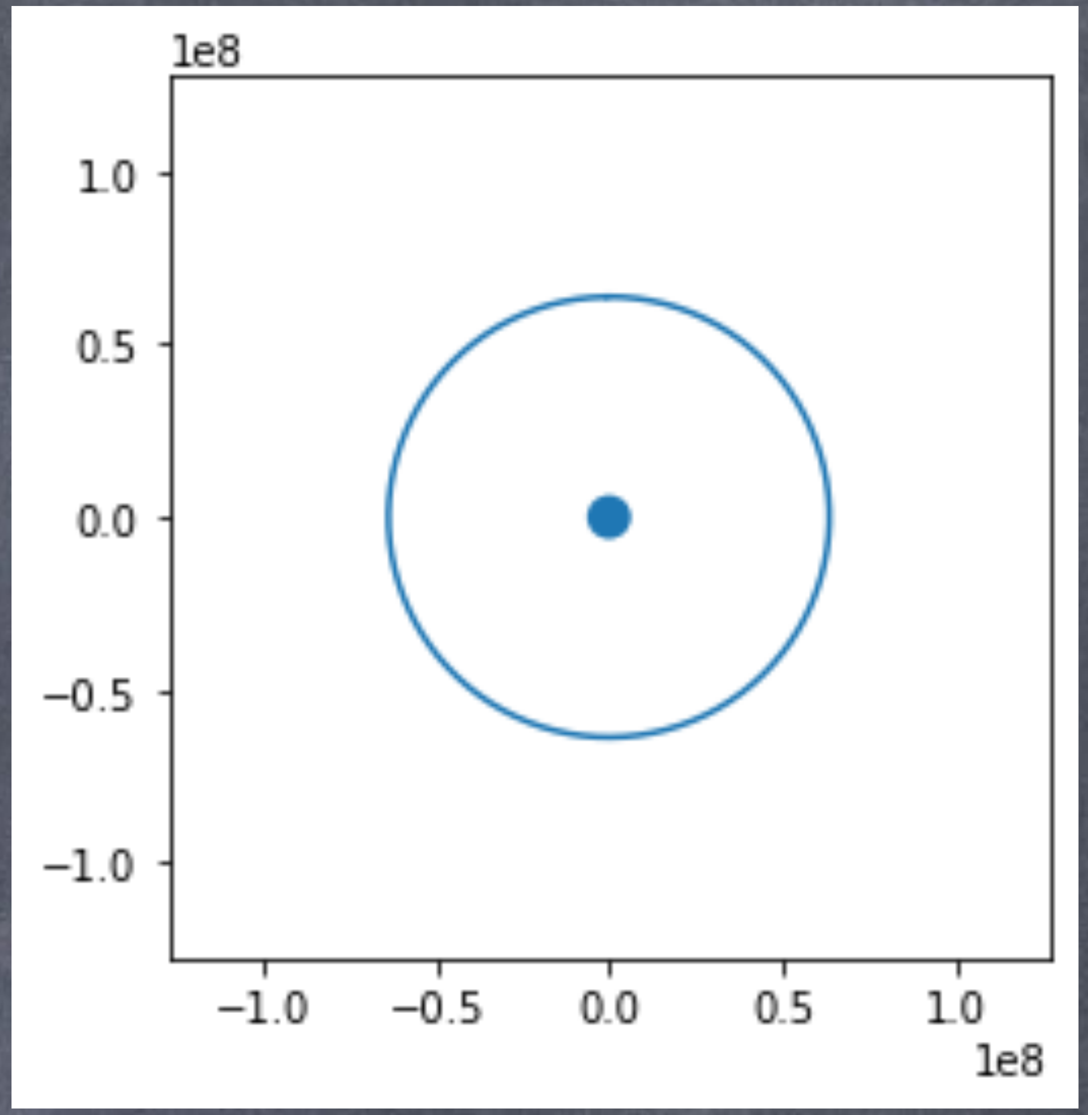
```
from pylab import *

dt=1
N=160000

g=9.81
Rz=6371000.

x=empty(N+1)
y=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vy=empty(N+1)
r=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
ay=empty(N+1)

x[0]=0.
y[0]=10. * Rz
vx[0] = 2500.
vy[0] = 0.

for n in range(0,N):
    r[n]=sqrt(x[n]*x[n] + y[n]*y[n])
    ax[n]=-g*Rz * x[n]/(r[n] * r[n])
    ay[n]=-g*Rz * y[n]/(r[n] * r[n])

    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    y[n+1]=y[n]+vy[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vy[n+1]=vy[n]+ay[n]*dt

plot(x,y)
```

výsledky



y0 = 10 Rz
v0 = 2500 m/s
Nespĺňa ani len
1. Keplerov zákon

y0 = 10 Rz
v0 = 7900 m/s
1. zákon OK
T = 50621 s



$$\left(\frac{10}{1.1}\right)^3 \simeq 1000 \neq 100 \simeq \left(\frac{50621}{5232}\right)^2$$

Gravitačná sila nepriamo úmerná vzdialenosti
tiež nedáva tretí Keplerov zákon.
Tento pokus bol omylom.

Ako rýchlo klesá grav. sila? II

- Je čas na druhý pokus.
- Jednou z celkom prirodzených možností je zvýšiť mocninu r v menovateli, čiže uvažovať

$$F \sim 1/r^2$$

$$\overrightarrow{F} = -\kappa \frac{M.m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Číselnú hodnotu súčinu $\kappa.M$ dostaneme opäť zo známeho gravitačného zrýchlenia na povrchu Zeme $g = \kappa.M/R_Z^2$
- $$\kappa.M = g\, R_Z^2$$

?

- **počiatočné podmienky:**

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 10\,R_z$

$vx_0 = 2500 \qquad vy_0 = 0$

- **počítanie**

$r_n = \mathrm{sqrt}\,(\,x_n{}^2 + y_n{}^2\,)$

$ax_n = -\,g\,R_z{}^2\,x_n\,/\,(r_n{*}r_n{*}r_n)$

$ay_n = -\,g\,R_z{}^2\,y_n\,/\,(r_n{*}r_n{*}r_n)$

$x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$

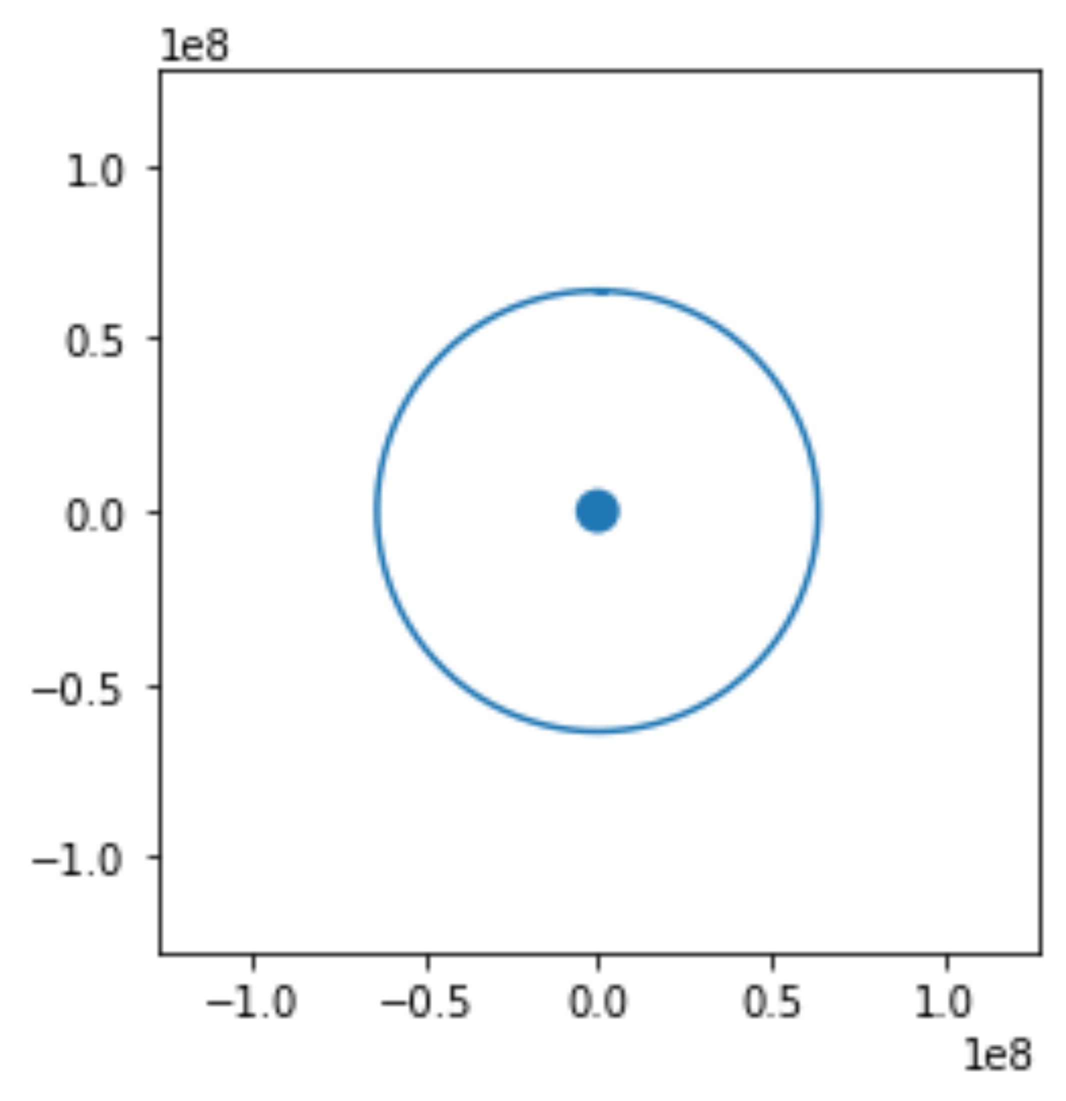
$y_{n+1} = y_n + vy_n * dt$

$vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$

$vy_{n+1} = vy_n + ay_n * dt$

```
from pylab import *

dt=1
N=161000

g=9.81
Rz=6371000.

x=empty(N+1)
y=empty(N+1)
vx=empty(N+1)
vy=empty(N+1)
r=empty(N+1)
ax=empty(N+1)
ay=empty(N+1)

x[0]=0.
y[0]=10. * Rz
vx[0] = 2500.
vy[0] = 0.

for n in range(0,N):
    r[n]=sqrt(x[n]*x[n] + y[n]*y[n])
    ax[n]=-g*Rz*Rz * x[n]/(r[n]*r[n]*r[n])
    ay[n]=-g*Rz*Rz * y[n]/(r[n]*r[n]*r[n])

    x[n+1]=x[n]+vx[n]*dt
    y[n+1]=y[n]+vy[n]*dt
    vx[n+1]=vx[n]+ax[n]*dt
    vy[n+1]=vy[n]+ay[n]*dt

plot(x,y)
```

výsledky

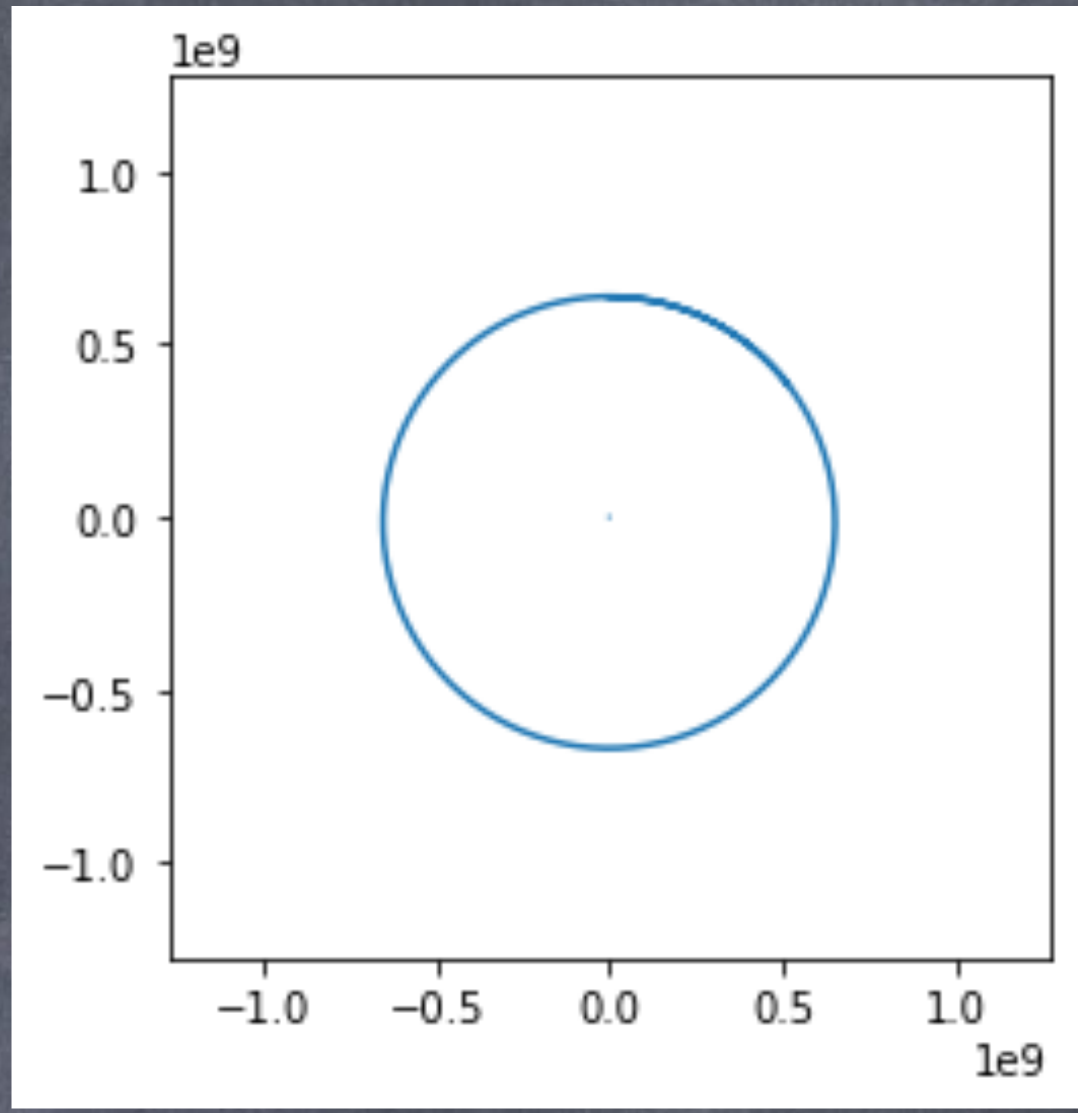


y0 = 10 Rz
v0 = 2500 m/s

T = 160182 s

y0 = 100 Rz
v0 = 7900 m/s

T = 5254980 s



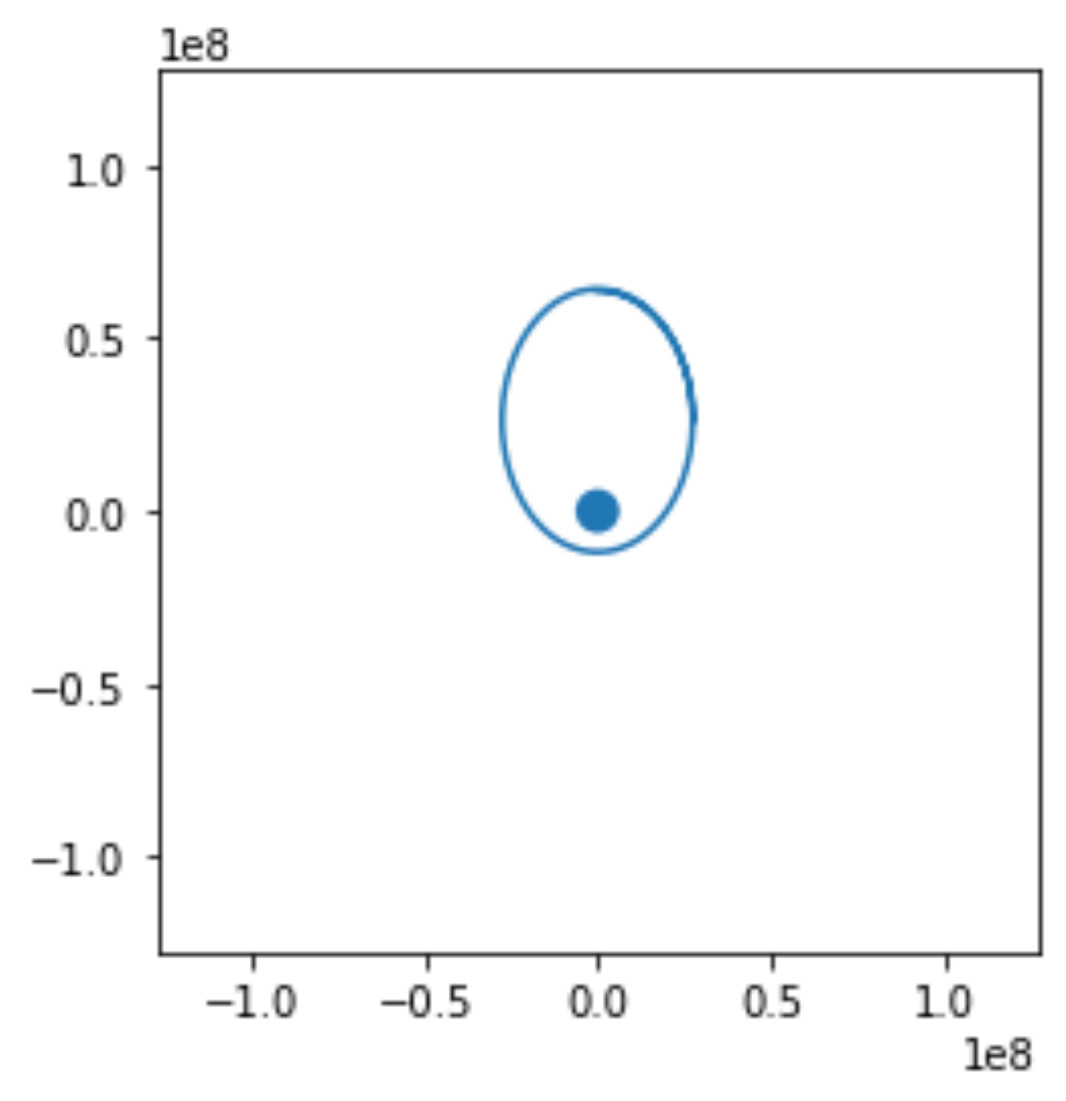
$$\left(\frac{10}{1.1}\right)^3 \simeq 1000 \quad = \quad 1000 \simeq \left(\frac{160182}{5232}\right)^2$$

Bingo!

$$\left(\frac{100}{1.1}\right)^3 \simeq 10^6 \quad = \quad 10^6 \simeq \left(\frac{5254980}{5232}\right)^2$$

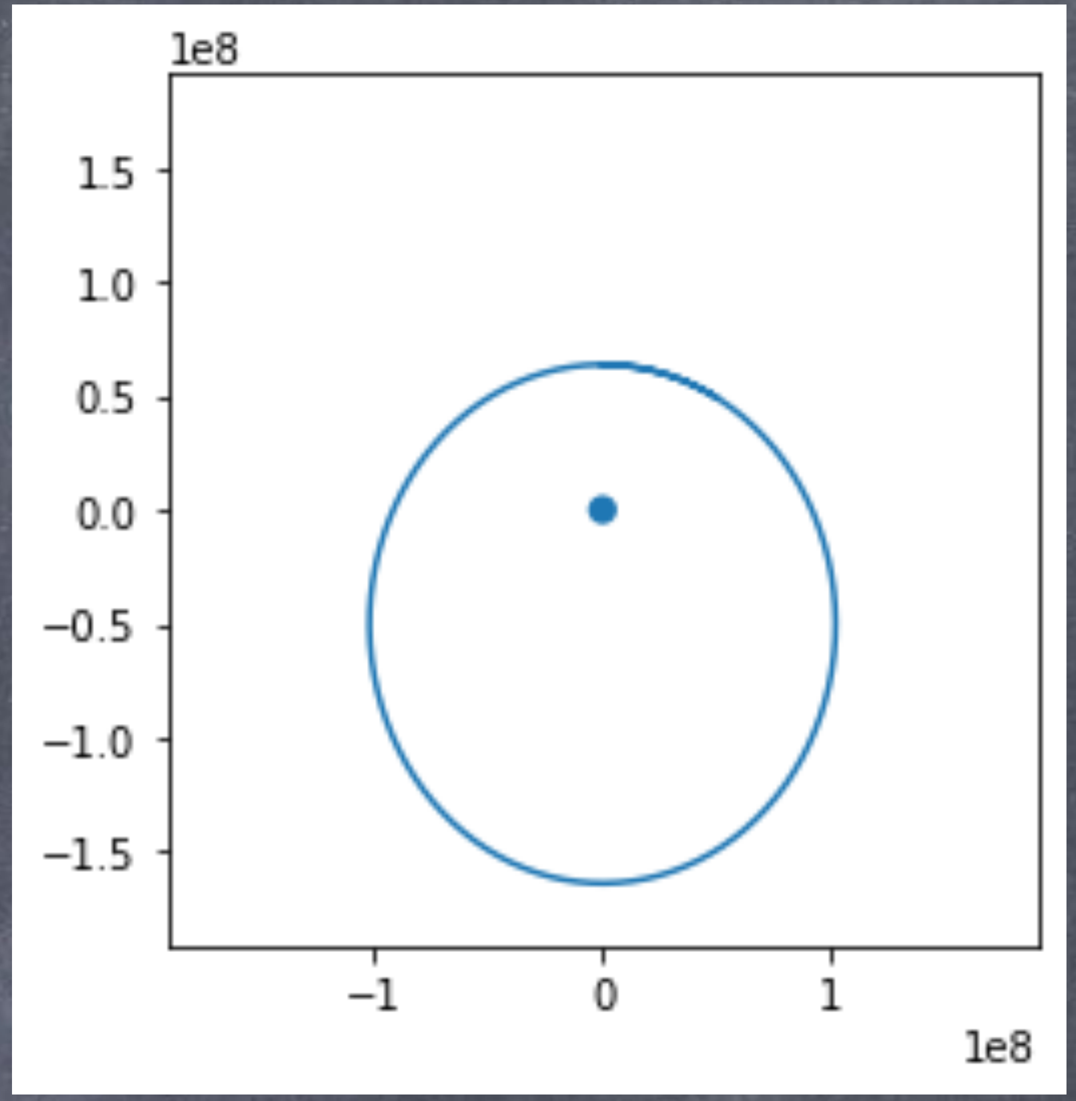
Bingo!

ďalšie výsledky



y0 = 10 Rz
v0 = 1400 m/s
elipsa

y0 = 10 Rz
v0 = 3000 m/s
elipsa



Sedí všetko, čo vyskúšame.
Ľubovoľné počiatočné podmienky vedú na pohyb, ktorý spĺňa všetky tri Keplerove zákony.
(S tým, že elipsy nemusia byť vždy blízke kružniciam a môžu to niekedy dokonca byť aj iné kužeľosečky.)

zhrnutie

zákon sily a gravitačný zákon

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad \vec{F} = -\kappa \frac{M\,.\,m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

naozaj predstavujú zjednotenie pozemskej a nebeskej mechaniky

V nebeskej mechanike je gravitačná sila dominantná.
V pozemskej mechanike hrajú významnú úlohu aj sily, ktoré sú rôznymi prejavmi elektromagnetických síl.
O nich bude reč nabudúce.

poznámka na záver

- Ak zo strednej školy poznáte vzťah pre dostredivé zrýchlenie $a = v^2/r$, môžeme z 3. Keplerovho zákona odvodiť závislosť gravitačnej sily od r aj bez našej metódy "krok za krokom"

- Keplerov zákon napíšeme takto: $r^3/T^2 = const$
a uvedomíme si, že $v \sim r/T$

- Spolu teda dostávame $r\,v^2 = const$ (iná konštanta)
čiže $v^2 = const/r$ a teda $a = v^2/r = const/r^2$