Coulombov zákon & comp.

základná sila bežného života

mechanika 5

kľúčová sila väčšiny fyzikálnych javov

- Takmer všetko, čo sa deje okolo nás, je prejavom takzvanej elektrostatickej sily, ktorá pôsobí medzi každými dvomi elektrickými nábojmi.
- Ako presne táto sila vyzerá, uhádol a experimentálne overil Charles Augustin de Coulomb v roku 1785 (takmer sto rokov po vydaní Newtonových Principií).
- Uhádnutie vyzeralo takto: čo keby elektrostatická sila vyzerala úplne ako Newtonova gravitačná sila, akurát by v úlohe hmotností vystupovali náboje?

Coulombova sila

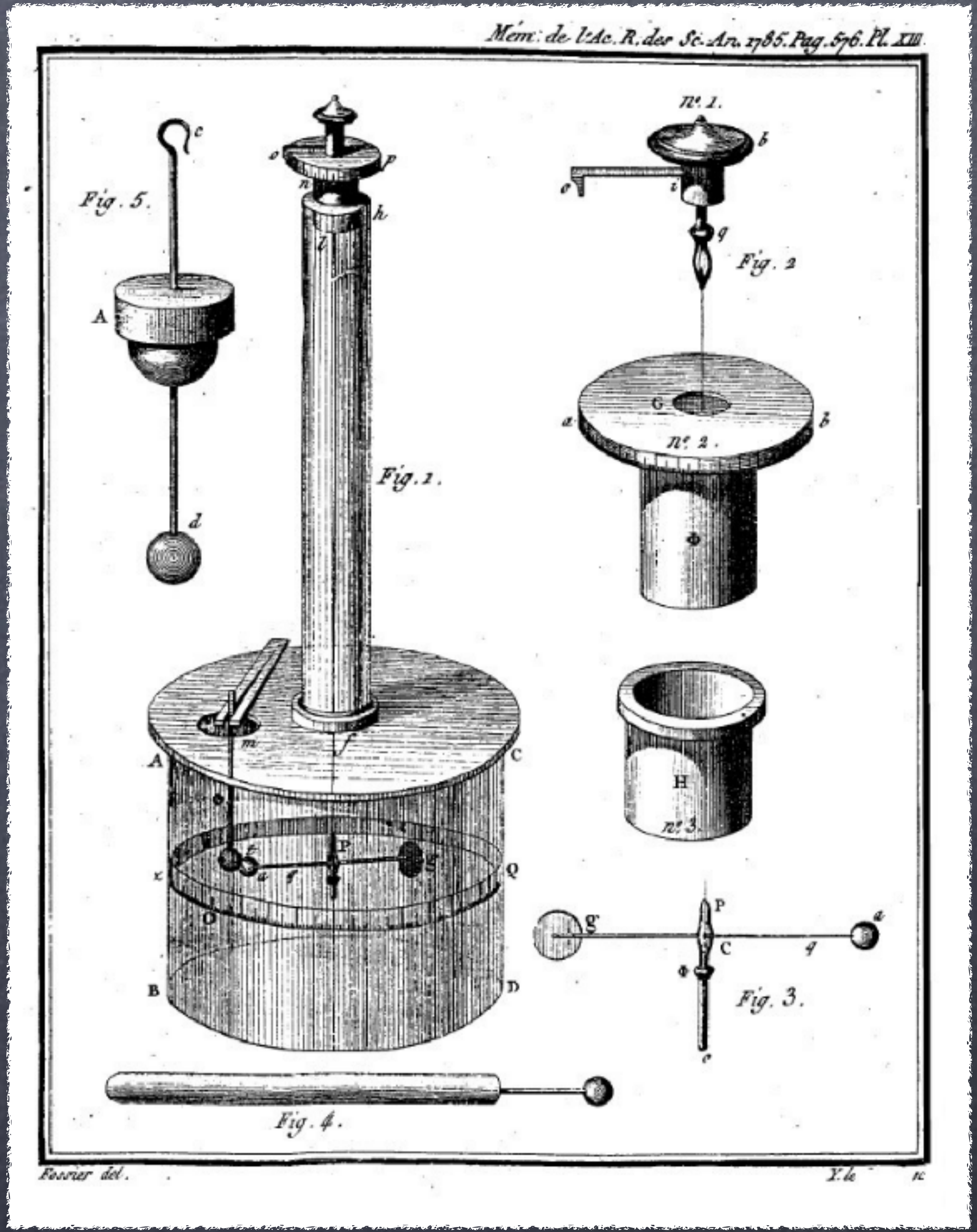
- Sila, ktorou pôsobí nejaký náboj Q sediaci v počiatku na náboj q sediaci v mieste s polohovým vektorom $\vec{r}$

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q \cdot q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Prvý člen je len nejaká čudne zapísaná konštanta
- Ak je súčin Q.q kladný, sila je odpudivá (v smere $\vec{r}$) ak je záporný, sila je príťažlivá (proti smeru $\vec{r}$)

experimentálne overenie

- Pomocou tzv. torzných váh (na lanku zavesená tyčka)
- Ak sa otočí, lanko sa snaží vrátiť do nestočenej polohy. Dá sa tým merať sila.
- Hlavná výhoda:
  Meria sa vo vodorovnom smere, v ktorom nepôsobí gravitačná sila Zeme. Preto sa takto dajú merať aj veľmi malé sily.



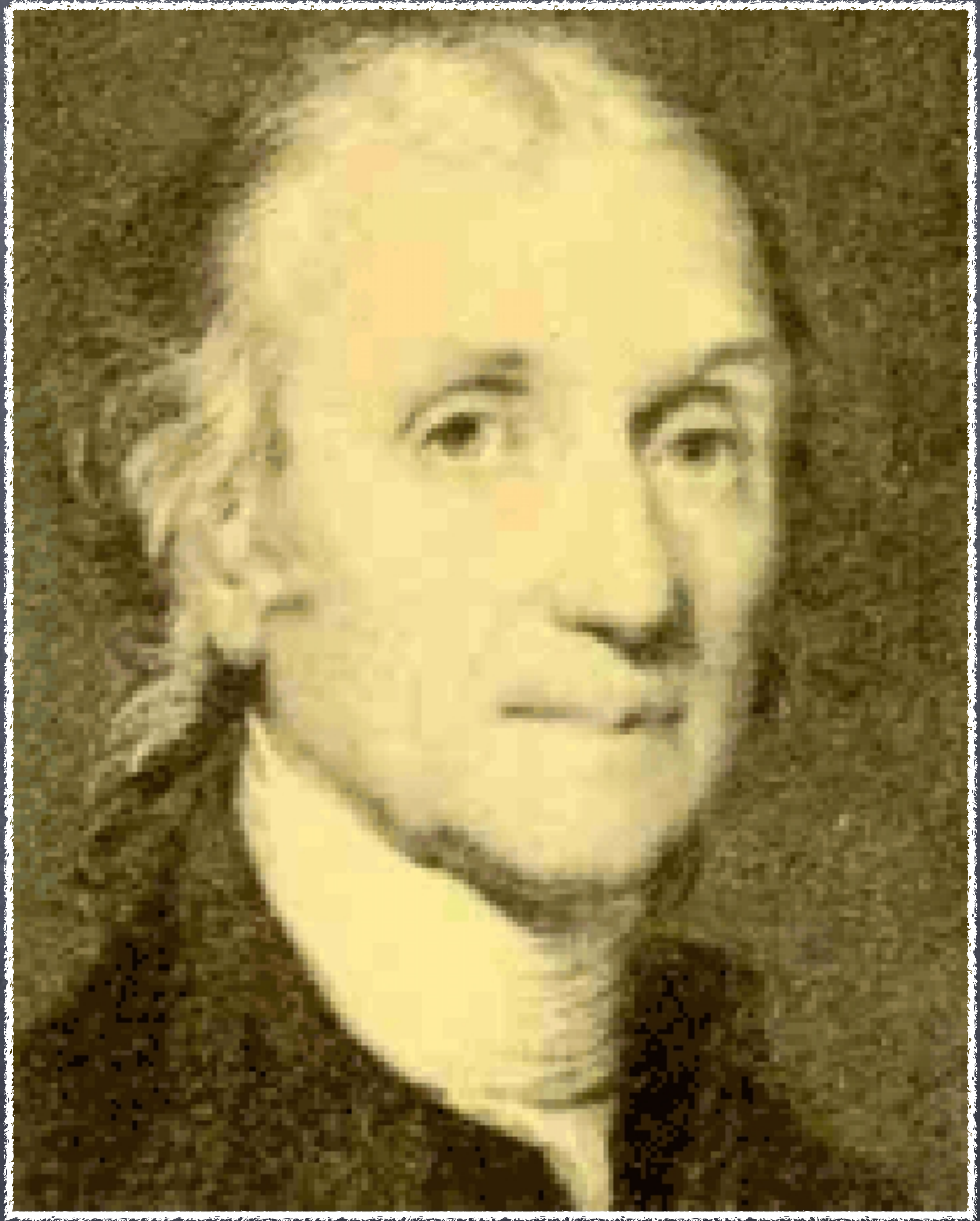
malá odbočka

Anglicko, koniec osemnásteho storočia. K osamelej šope pristupuje muž a ďalekohľadom zastrčeným do diery vyvŕtanej v stene pozoruje, čo sa deje vo vnútri. Keď pozorovanie dokončí, vracia sa do domu a dáva si pozor, aby nikoho nestretol.

Tento muž je jedným z najbohatších ľudí Británie. Z matkinej strany je vnukom vojvodu z Kentu, z otcovej strany vnukom vojvodu z Devonshire. Peniaze ho však nezaujímajú. Momentálne ho najviac zaujíma to, čo má zavesené v šope.

Tento muž je súčasne jedným z najväčších čudákov široko-ďaleko. Vo svojom dome neznesie takmer nijakých ľudí, celé služobníctvo tvorí jedna jediná osoba, s ktorou komunikuje prostredníctvom písaných odkazov.

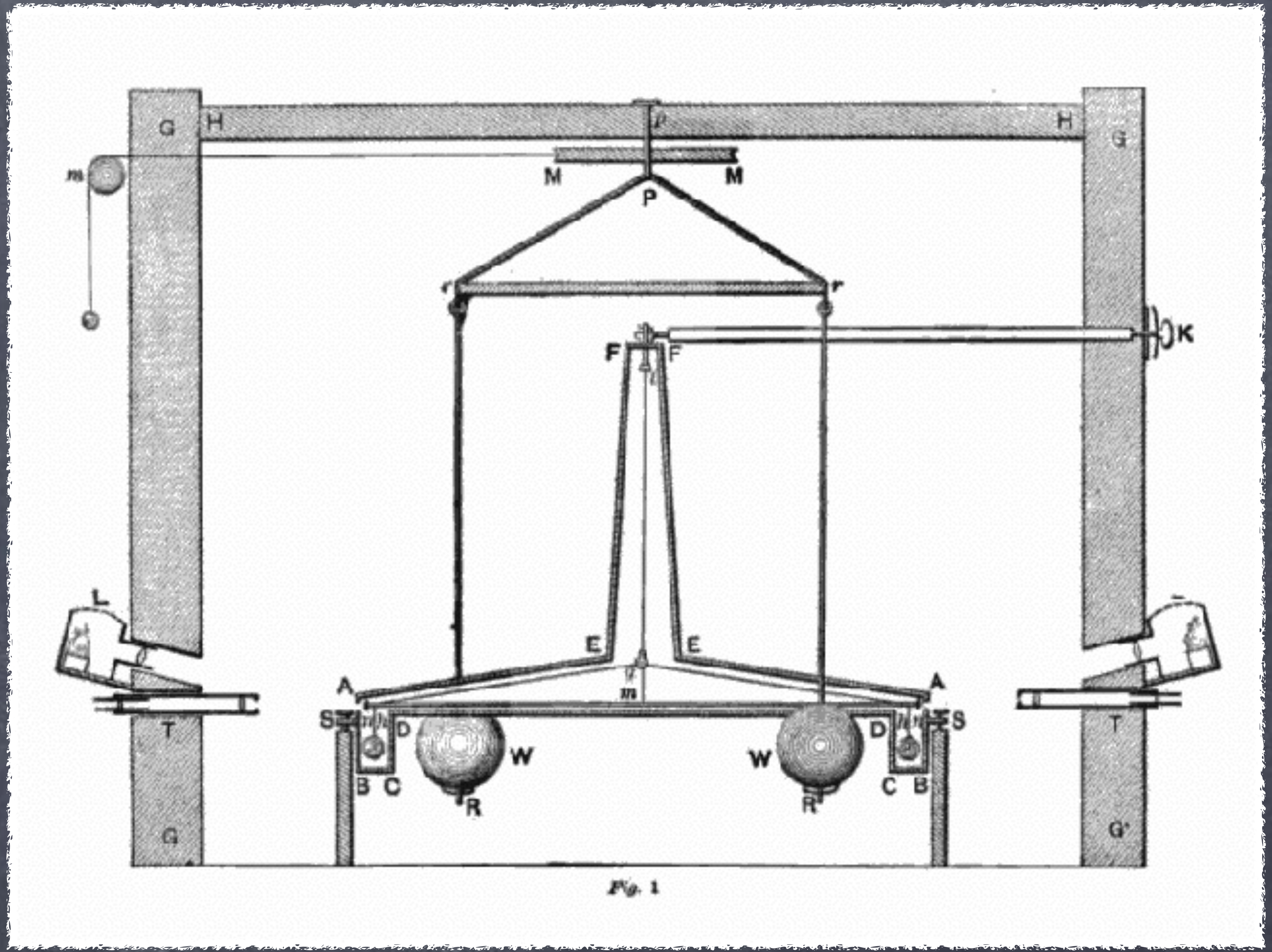
Tento muž je navyše v tom, čo robí, nesmierne skúsený. Má 67 rokov a takmer celý život sa venoval svojej záľube. A je v nej naozaj dobrý. Takže hoci o mnohom z toho, čo urobil, takmer nikto nevie, je známy a slávny. Ale to, čo má v šope, ho presláví viac, než všetko ostatné.



Henry Cavendish, 1731–1810

Čo mal Cavendish v šope?

- Torzné váhy (podľa Coulombovho vzoru, ale veľmi vylepšené), ktorými dokázal odmerať gravitačnú silu medzi dvomi olovenými guľami.
- Z odmeranej sily, zo vzdialenosti gulí a z ich známych hmotností vieme nájsť hodnotu gravitačnej konštanty κ.
- A keďže $\kappa . M_Z = g . R_Z^2$ (pozri minulú prednášku), vieme vypočítať samotné M_Z. Čiže Cavendish odvážil Zem.



koniec malej odbočky

dôležitý pojem: silové pole

- Ak sedí teleso s hmotnosťou M a nábojom Q v počiatku, potom kamkoľvek umiestnime iné teleso s hmotnosťou m a nábojom q, budú naň pôsobiť sily $m.\vec{G}$ a $q.\vec{E}$, kde

$$\vec{G} = -\kappa \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Funkcie $\vec{G}(\vec{r})$ a $\vec{E}(\vec{r})$ nazývame silovými poliami resp. intenzitami silových polí (gravitačného a elektrického)

premyslite si

- Ak sa náboj q_1 nachádza v mieste $\vec{r}_1$ a náboj q_2 v $\vec{r}_2$, potom Coulombova sila pôsobiaca na druhý náboj je

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

- Aká je intenzita elektrického poľa od náboja q_1 ?

- Ako je to v prípade gravitačného poľa?

magnetické pole

- Podobne sa dá zaviesť aj magnetické pole $\vec{B}(\vec{r})$
- Ako vyzerá sila pôsobiaca na náboj q pohybujúci sa rýchlosťou $\vec{v}$ v elektrickom a magnetickom poli? To zistil v roku 1895 (čiže prekvapujúco neskoro) Hendrik Lorentz (Nobelova cena 1902)
- Zaujímavosť: J. J. Thompson (Nobelova cena 1906) na to prišiel už v roku 1881, ale mal tam chybný faktor 1/2

Lorentzova sila

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$$

- Bežné magnetické polia bývajú podstatne slabšie ako elektrické polia, preto často dominuje elektrické pole (vďaka tomu v tejto chvíli nepotrebujeme vedieť, ako presne je definovaný takzvaný vektorový súčin $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$)
- Elektrické pole nemusí byť dané Coulombovým zákonom (vo všeobecnosti je dané Maxwellovými rovnicami), ale časť daná Coulombovým zákonom je často dominantná

nepovinná domáca úloha

- ak má magnetické pole smer osi z, potom magnetická sila má zložky

$$Fx = q.vy.B$$
$$Fy = -q.vx.B$$

- napíšte program na počítanie pohybu v homogénnom magnetickom poli (nakreslite trajektóriu v rovine xy)
- pomocou programu nájdite pohyb v skížených homogénnych poliach (elektrické v smere osi y, magnetické v smere osi z)

kľúčová časť programu:

$$ax_n = q\ vy_n\ B\ /\ m$$

$$ay_n = q\ (\ E - vx_n\ B\ )\ /\ m$$

$$x_{n+1} = x_n + vx_n * dt$$

$$z_{n+1} = z_n + vz_n * dt$$

$$vx_{n+1} = vx_n + ax_n * dt$$

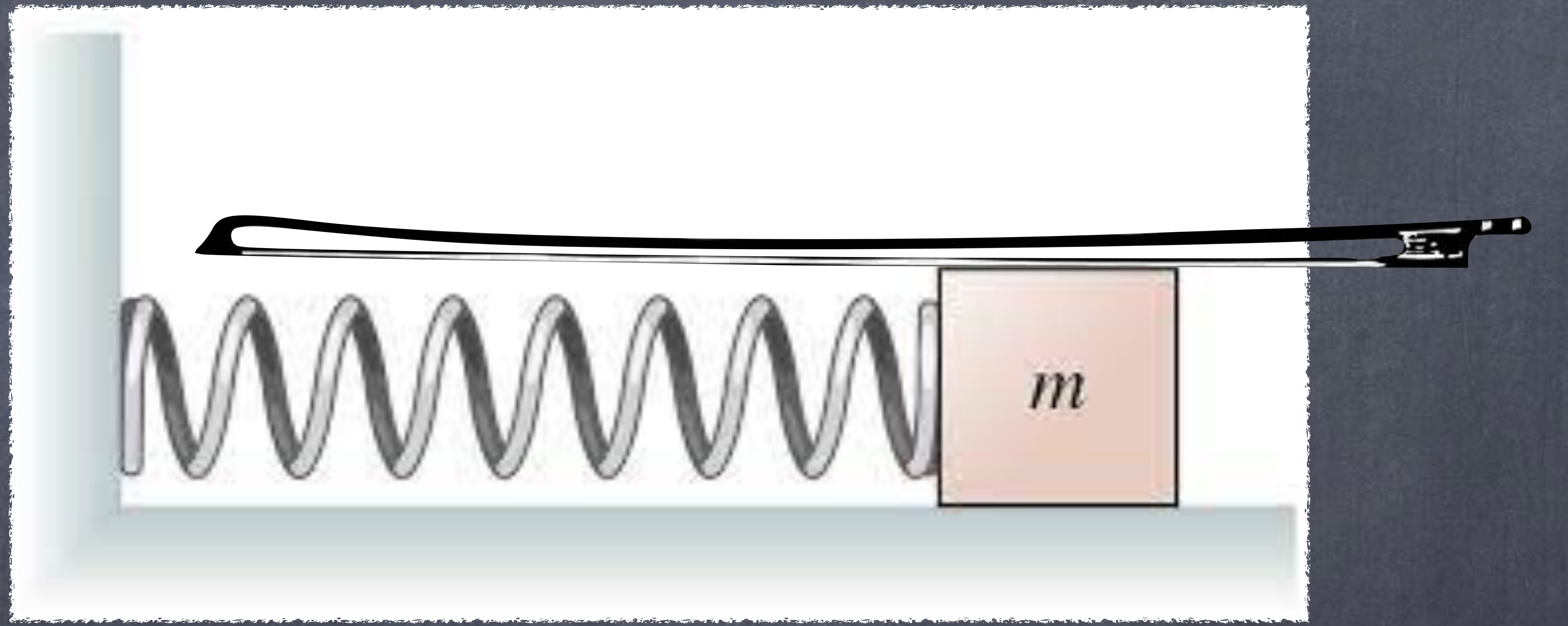
$$vz_{n+1} = vz_n + az_n * dt$$

prakticky všetko

- Skoro všetko okolo nás je dôsledkom Lorentzovej sily a z nej najmä Coulombovej sily
- Spolu s kvantovou mechanikou je Coulombova sila zadpovedná za chemickú väzbu aj za štruktúru látok (tuhé látky, kvapaliny, plyny)
- Je tiež zodpovedná za interakcie medzi látkami, ktoré sa prejavujú napríklad ako elastické sily, kontaktné sily, odpor prostredia, trenie, ...

teliesko na pružinke

- výborný ilustračný príklad pôsobenia rôznych síl, ktoré sú dôsledkami elektrických síl
- samotná pružina (elastická) pôsobenie podložky (kontaktná) tlmenie (odpor vzduchu, trenie)
- a čo sa stane, keď budeme po teliesku zvrchu ťahať husľový sláčik? čo vlastne robí sláčik?



- kvalitatívne porozumenie: Jeden výdych koňa
- kvantivatívne porozumenie: programy v pythone

elastická sila

- Vo všeobecnosti komplikovaná, ale v niektorých situáciách je dominantný člen jednoduchý
- Sila, ktorou pôsobí mierne stlačená alebo roztiahnutá tyč (prierez S, dĺžka l, predĺženie Δl) na svojich koncoch má smer tyče a veľkosť danú Hookovým zákonom

$$F = E \,.\, S \,.\, \frac{\Delta l}{l}$$

- Konštanta E sa nazýva Youngov modul pružnosti

nepovinná úloha tu a teraz

- pri kmitaní pružiny sa skutočná dĺžka zvinutej pružiny mení len málo, takže sa zvykne považovať za nemennú
- predĺženie pružiny je úmerné výchylke telieska
- $F = -\frac{E\,.\,S}{l}\,\Delta l = -\,k\,.\,x$
- znamienko mínus je tam kvôli správnej orientácii sily

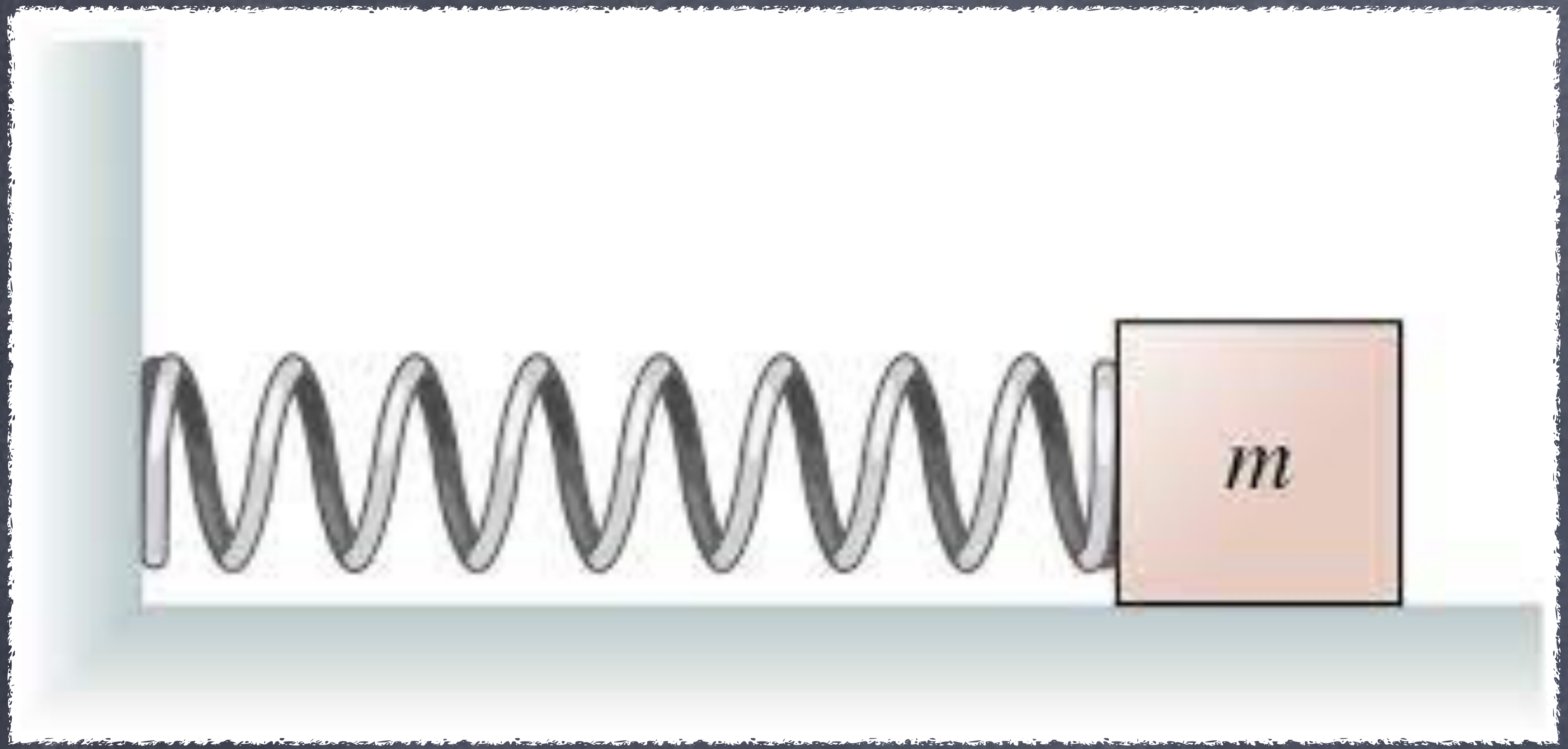
- napíšte kľúčovú časť programu pre počítanie
- mali by ste mať toto:

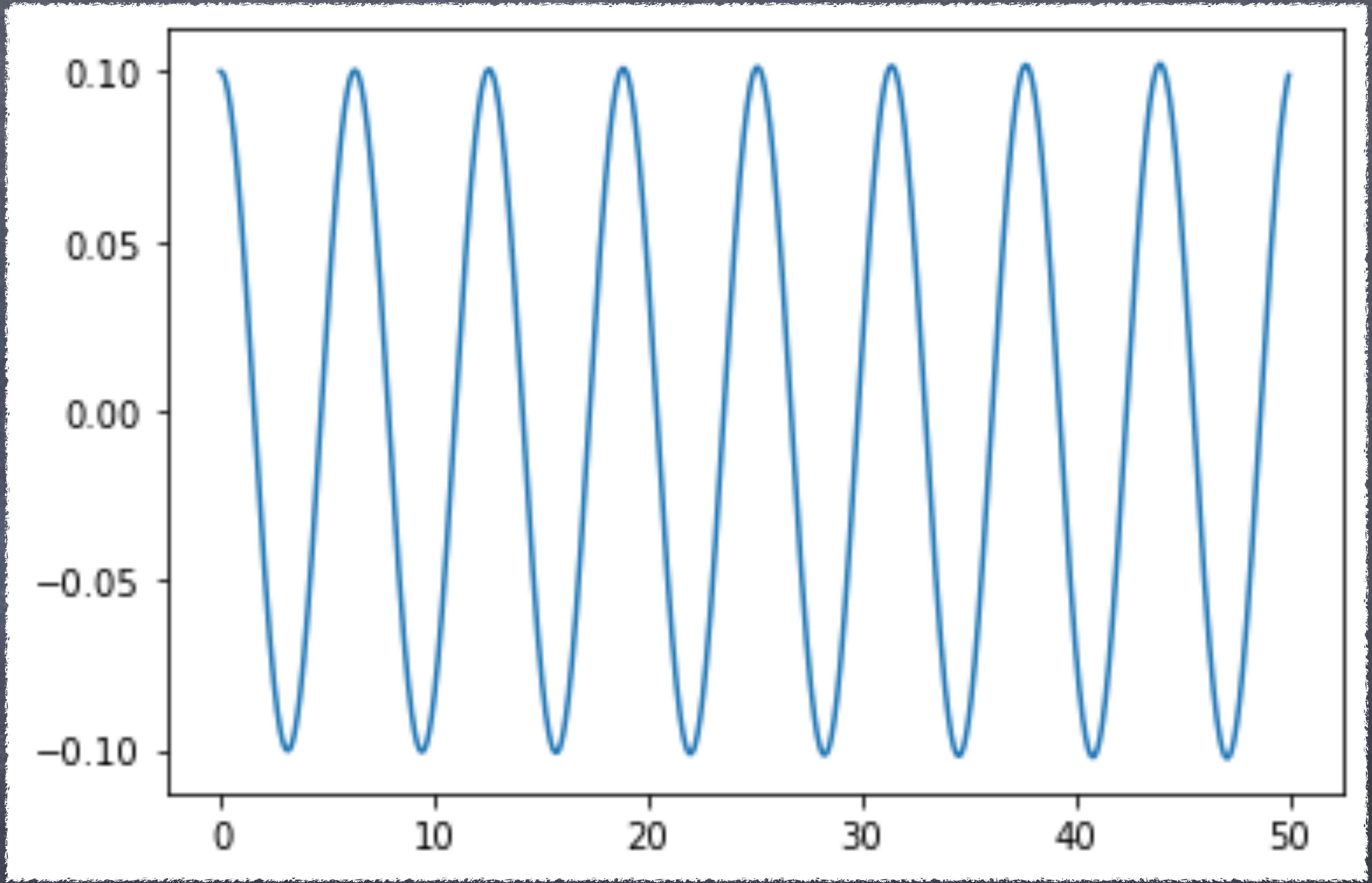
$a_n = -\,k\,x_n\,/\,m$

$x_{n+1} = x_n + v_n * dt$

$v_{n+1} = v_n + a_n * dt$

oscilátor na ľade





- nulové trenie
- nulový odpor vzduchu
- $a_n = -k\, x_n / m$

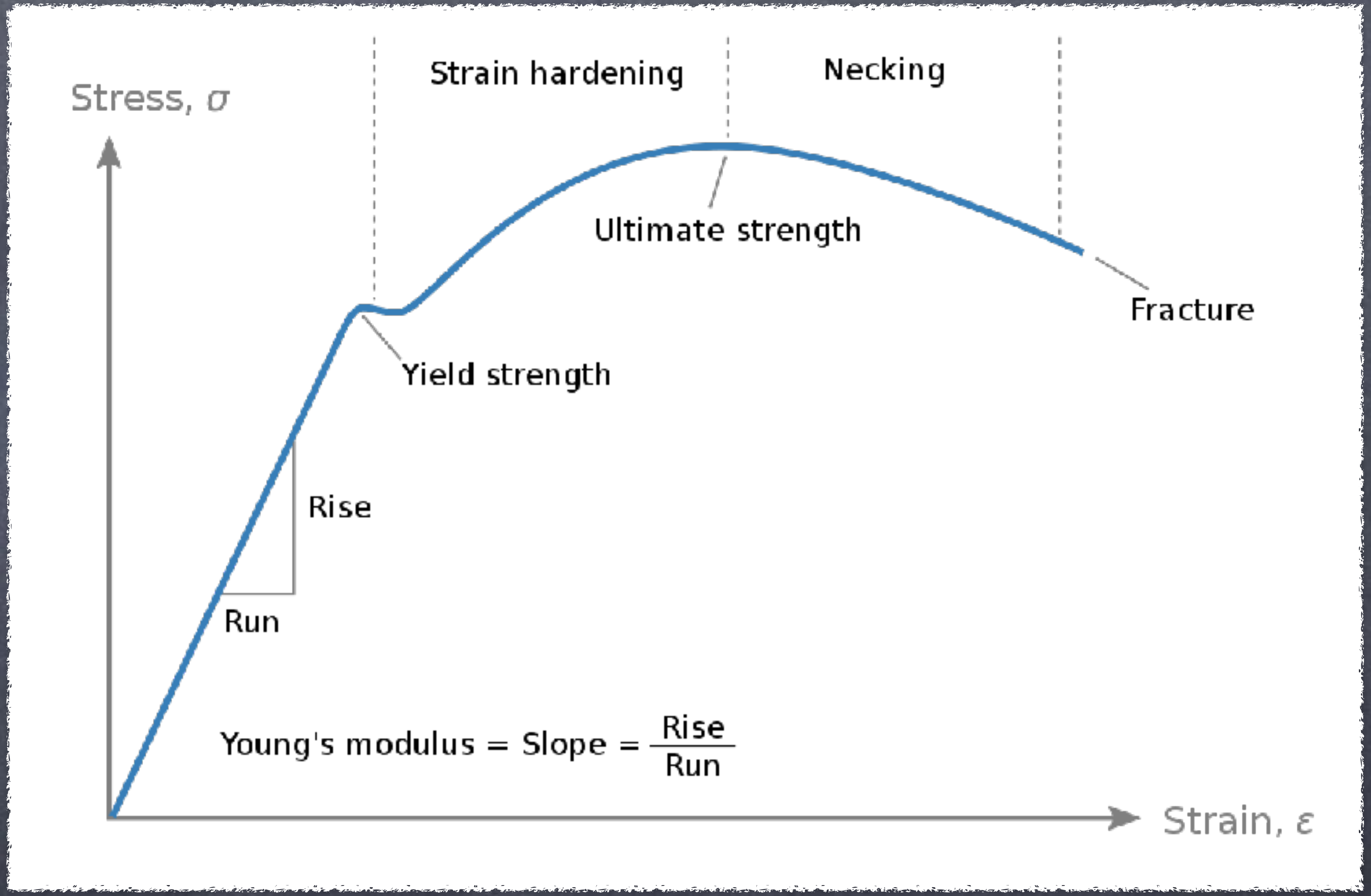
  $x_{n+1} = x_n + v_n * dt$

  $v_{n+1} = v_n + a_n * dt$

$m=1 \quad k=1 \quad x_0=0.1 \quad v_0=0$

nepovinné poznámky k pružnosti

- uvedená lineárna závislosť je len priblížením skutočnej závislosti, pričom priblíženie je dobré len v určitom intervale hodnôt príslušných veličín
- malé deformácie pružného telesa nemusia spočívať len v stláčaní a naťahovaní, môže ísť aj o tzv. deformácie v šmyku (nerovnaké posunutia) alebo o skrútenia – pre každý typ malej deformácie platí osobitný Hookov zákon



typická závislosť napätia $\sigma = F/S$ od relatívneho predĺženia $\varepsilon = \Delta l/l$

sila odporu prostredia

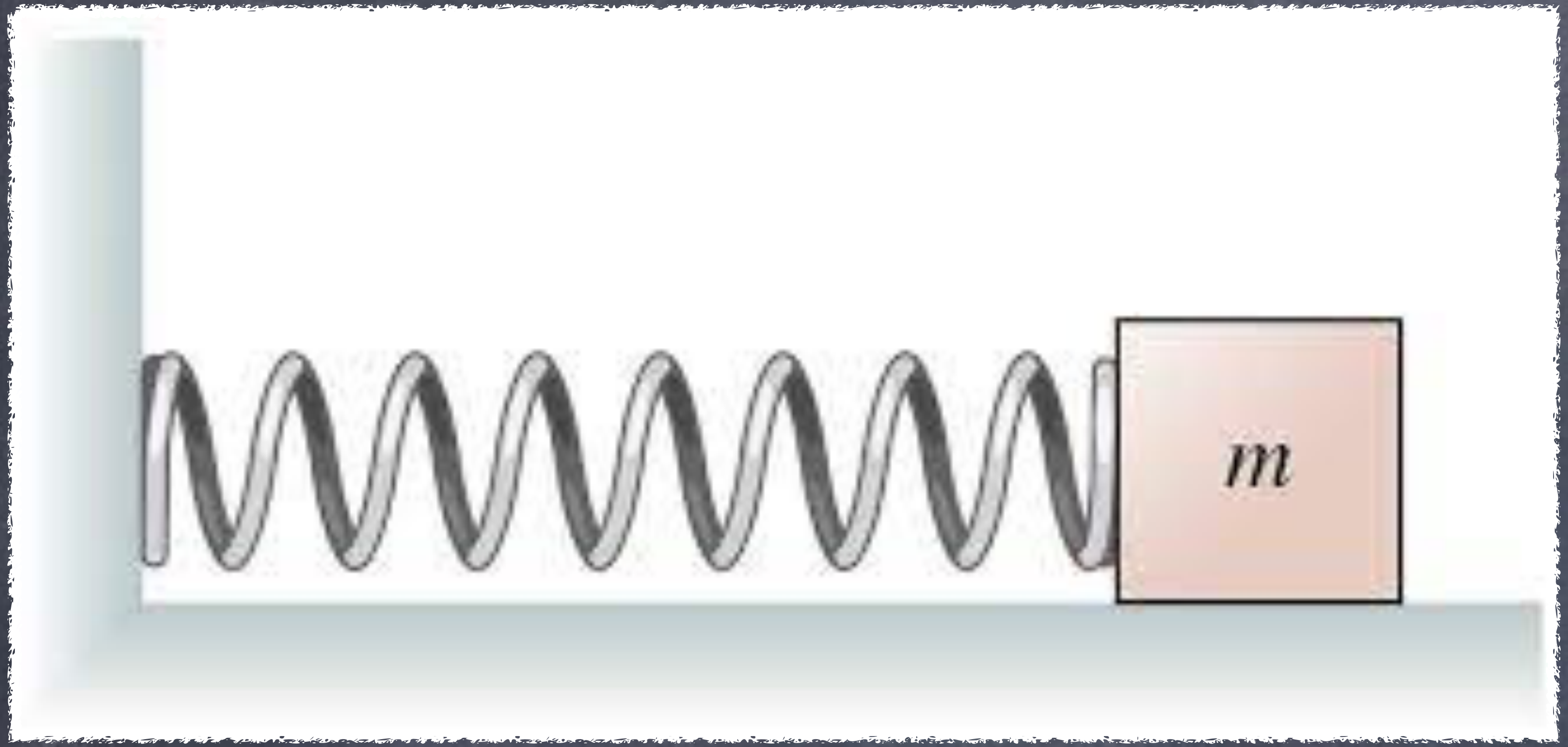
- Vo všeobecnosti veľmi komplikovaná, ale pre malé rýchlosti je dominantný člen veľmi jednoduchý
- Naozaj malé rýchlosti

$$\overrightarrow{F} = -\gamma . \overrightarrow{v}$$

- Trochu väčšie rýchlosti (v pomerne širokom intervale)

$$\overrightarrow{F} = -\alpha . v . \overrightarrow{v}$$

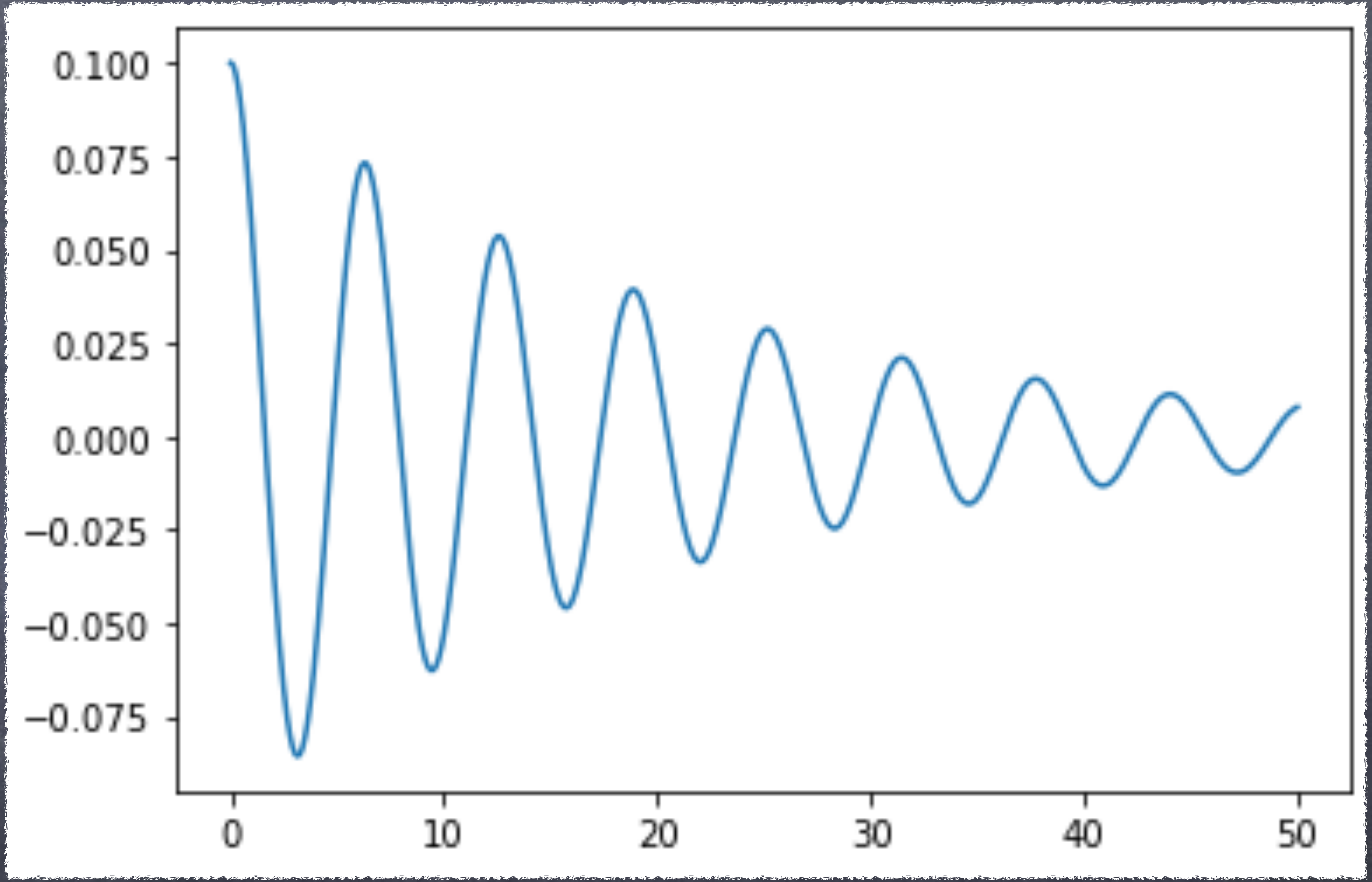
tlmený oscilátor na ľade



- nulové trenie
- malý odor vzduchu
- $a_n = (- k\, x_n - \gamma * v_n)/ m$

  $x_{n+1} = x_n + v_n * dt$

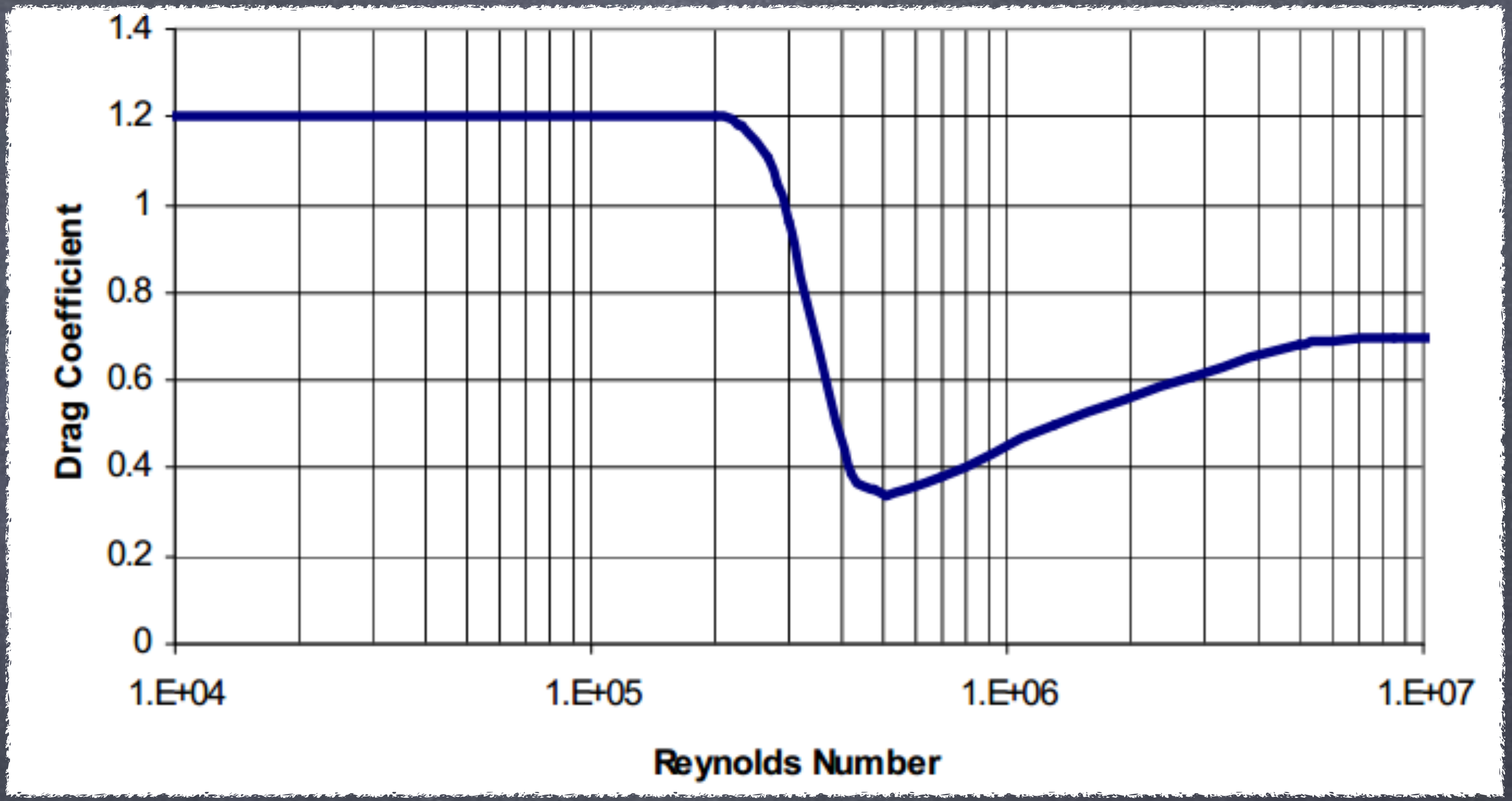
  $v_{n+1} = v_n + a_n * dt$



$m=1 \quad k=1 \quad \gamma=0.1 \quad x_0=0.1 \quad v_0=0$

nepovinná poznámka k odporu

- koeficient α sa často zapisuje ako $\alpha = \frac{1}{2}\rho A \,.\, c_d$ (ρ je hustota prostredia, A je plocha prierezu telesa v smere kolmom na rýchlosť a c_d sa nazýva koeficient odporu (drag coefficient)
- relatívna rýchlosť telesa a prostredia sa zvykne charakterizovať pomocou tzv. Reynoldsovho čísla $Re = v \,.\, L/\mu$ kde v je tá relatívna rýchlosť, L je typický lineárny rozmer telesa (napr. olomer gule) a μ je viskozita.

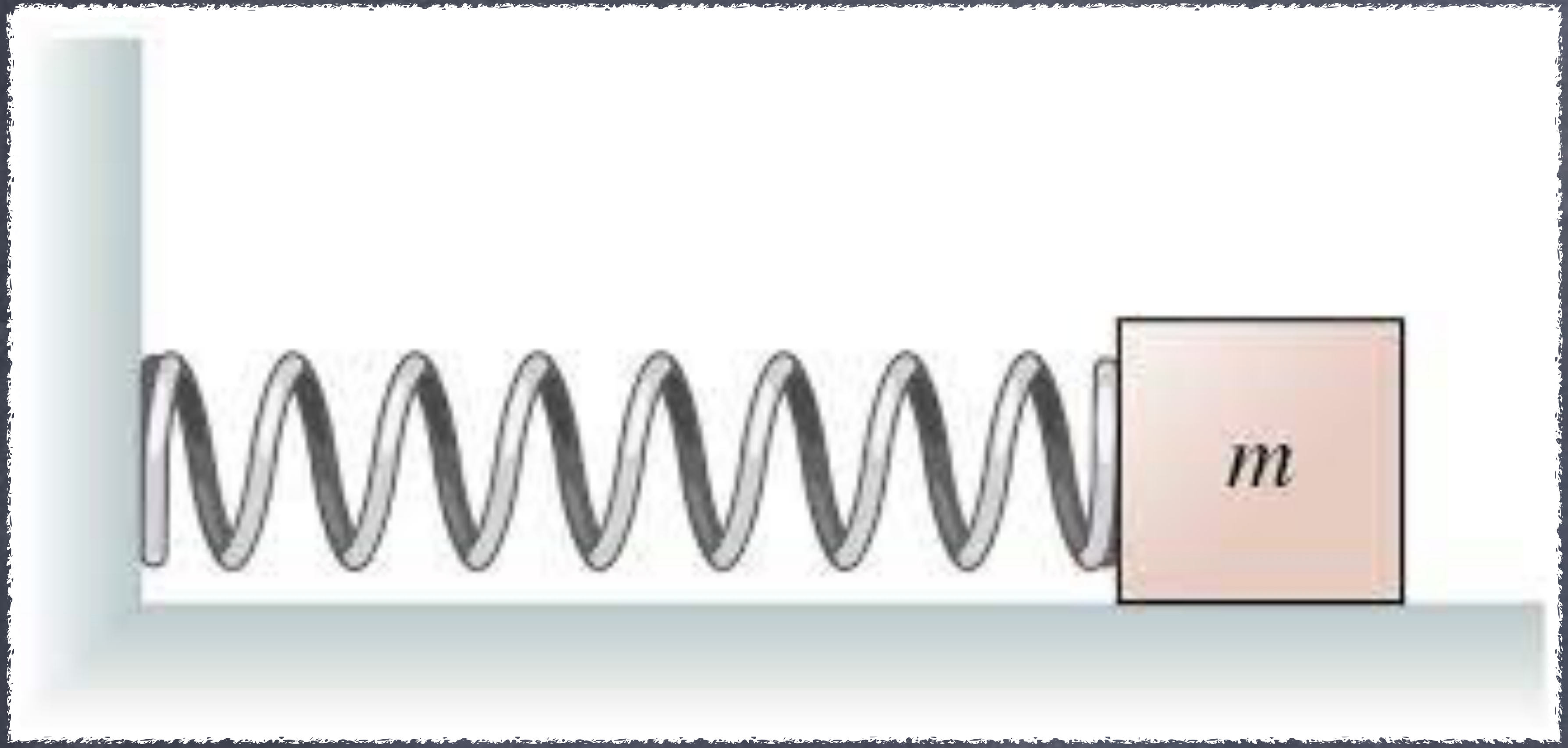


typická závislosť koeficientu odporu od Reynoldsovho čísla (jednoduchý vzťah $F = \alpha \,.\, v^2$ s konštantným α platí iba pre dostatočne malé Re, čiže aj v)

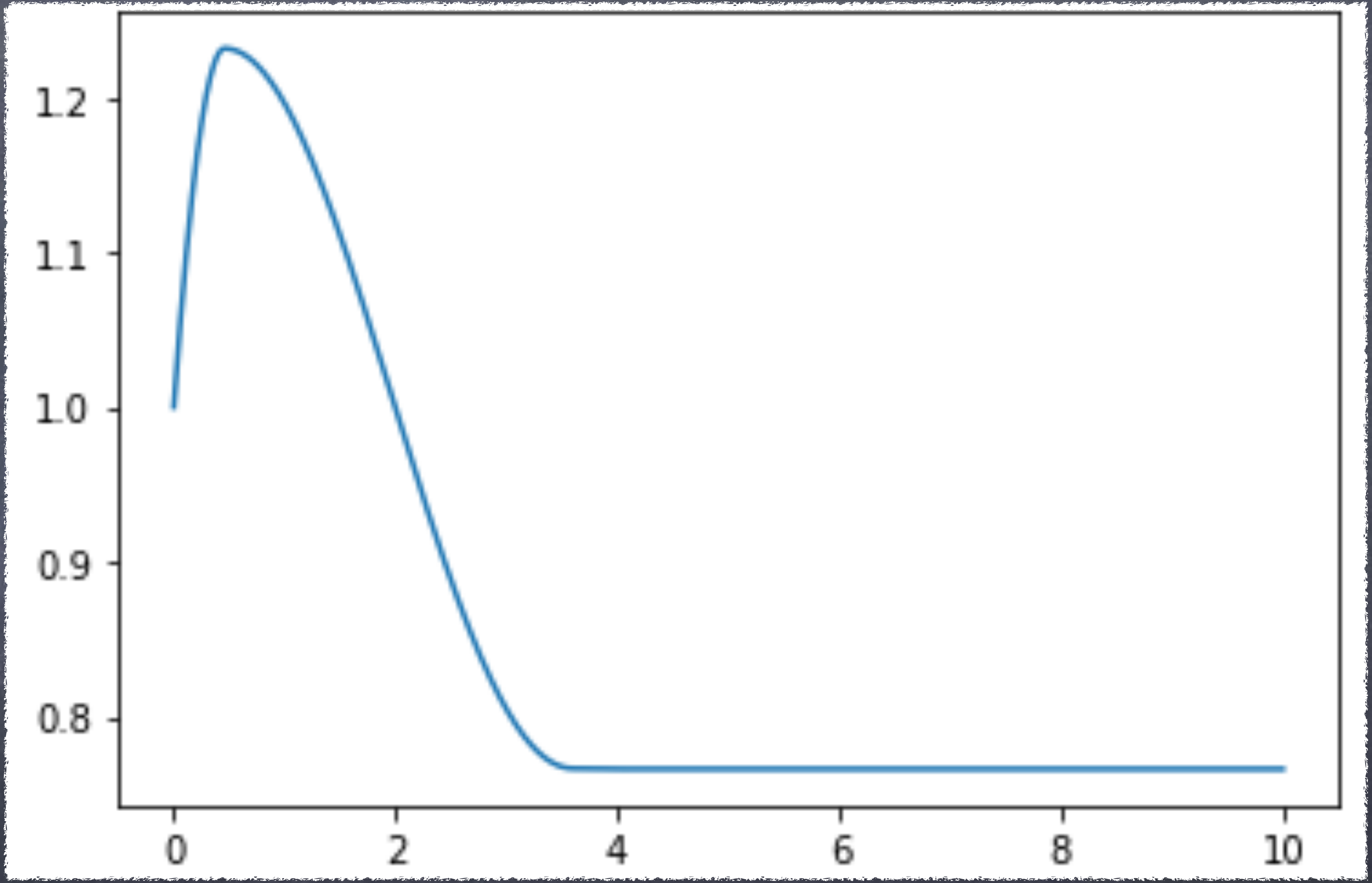
trecia sila

- Vo všeobecnosti dosť komplikovaná, ale dominantný člen veľmi jednoduchý, závisiaci len od takzvanej normálovej sily (kolmej na styčnú plochu)
- Kinetické trenie (pohybujúce sa teleso):
  veľkosť $F = f_k . N$ smer proti smeru rýchlosti
  $$\vec{F} = -f_k . N . \frac{\vec{v}}{v}$$
- Statické trenie (stojace teleso):
  veľkosť aj smer také, aby nenastal pohyb, pričom ale
  $$F \leq f_s . N$$

tlmený oscilátor s trením



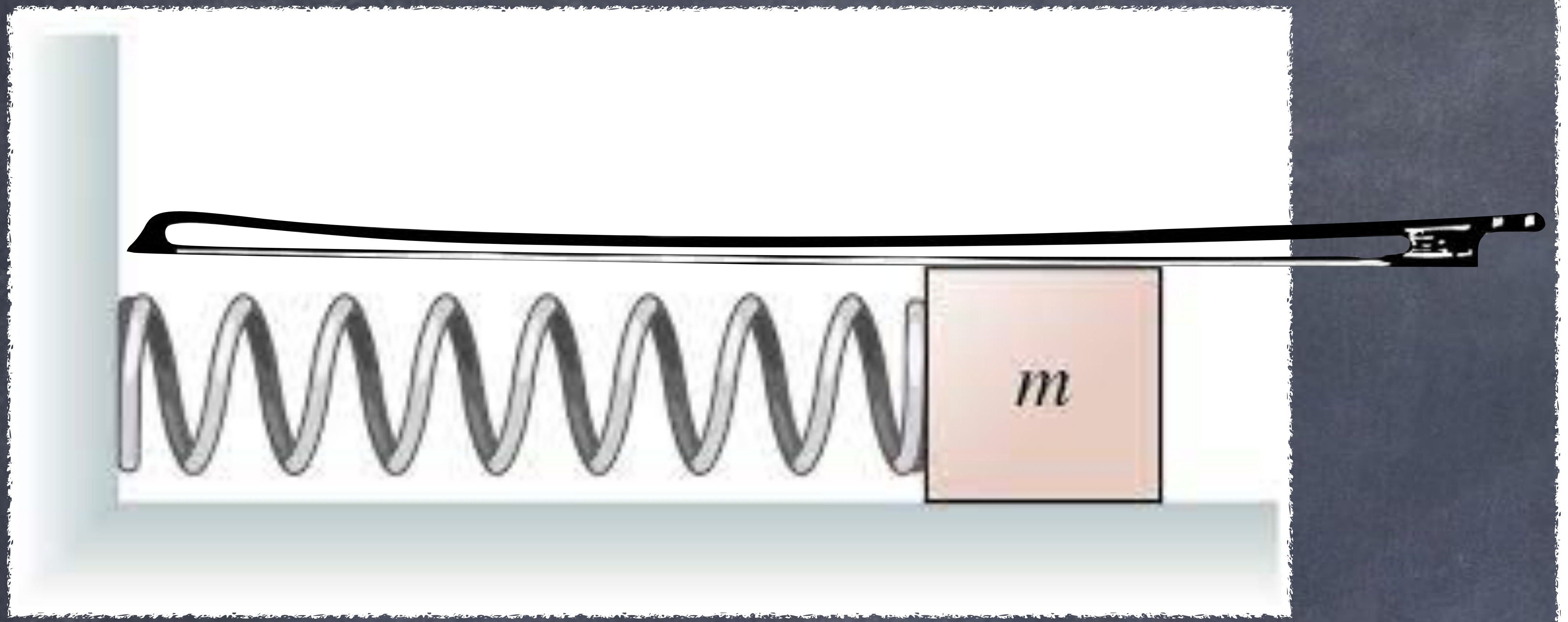

```
if abs(v[n])<eps and abs(k*x[n])<fs*m*g:
    a[n]=0.
else:
    a[n]=(-k*x[n]-gamma*v[n]
          - fk*m*g*sgn(v[n]))/m
```



$m=1 \quad k=1 \quad \gamma=0.1 \quad x_0=1 \quad v_0=1$

$f_k=0.1 \qquad f_s = 0.3$

oscilátor na ľade + sláčik



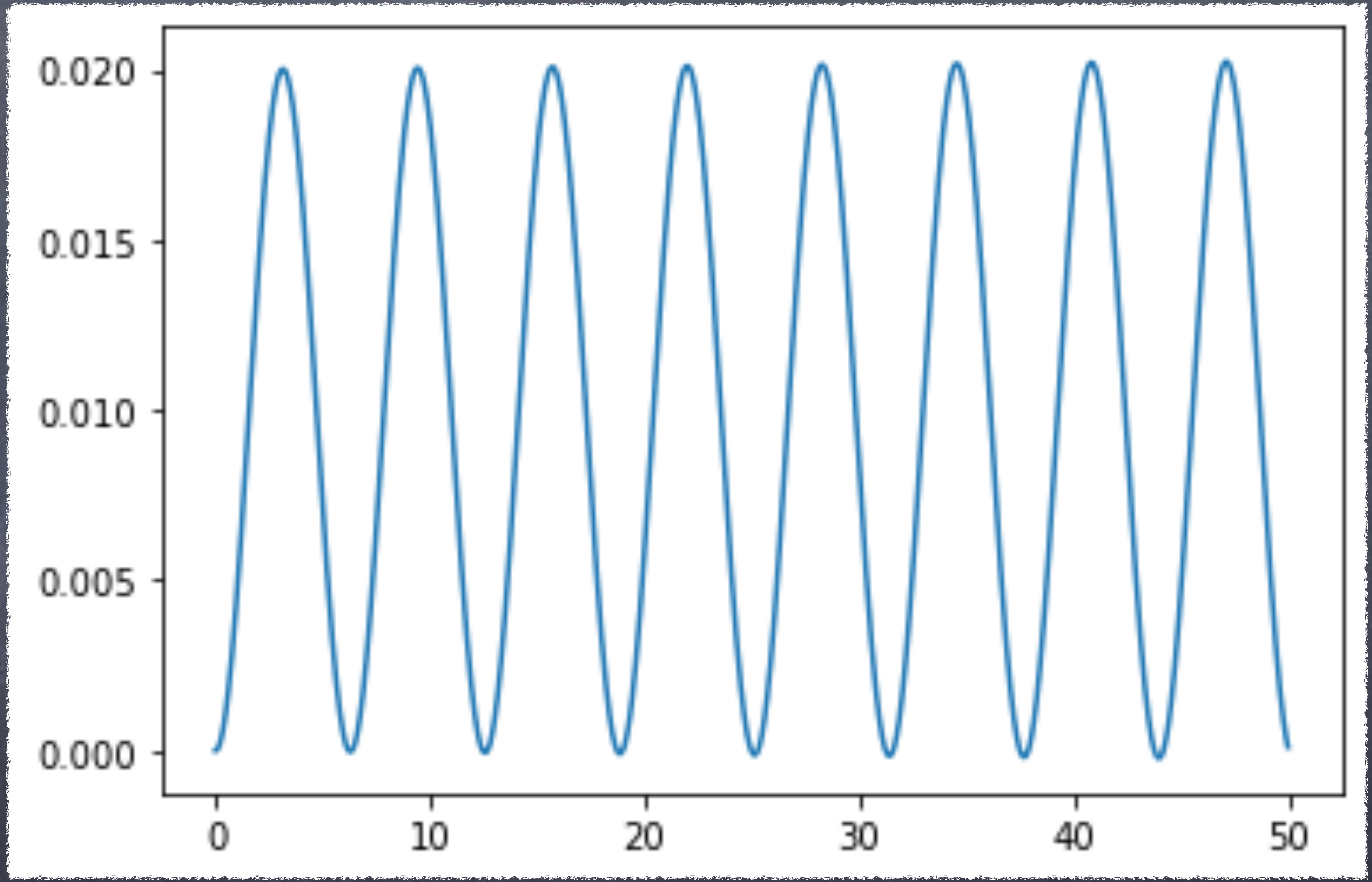

```
if abs(v[n]-u)<eps and
  abs(-k*x[n]-gamma*v[n])<fs*Fn:

      a[n]=0.

   else:

      a[n]=(-k*x[n]-gamma*v[n]

            +fk*Fn*sgn(u-v[n]))/m
```

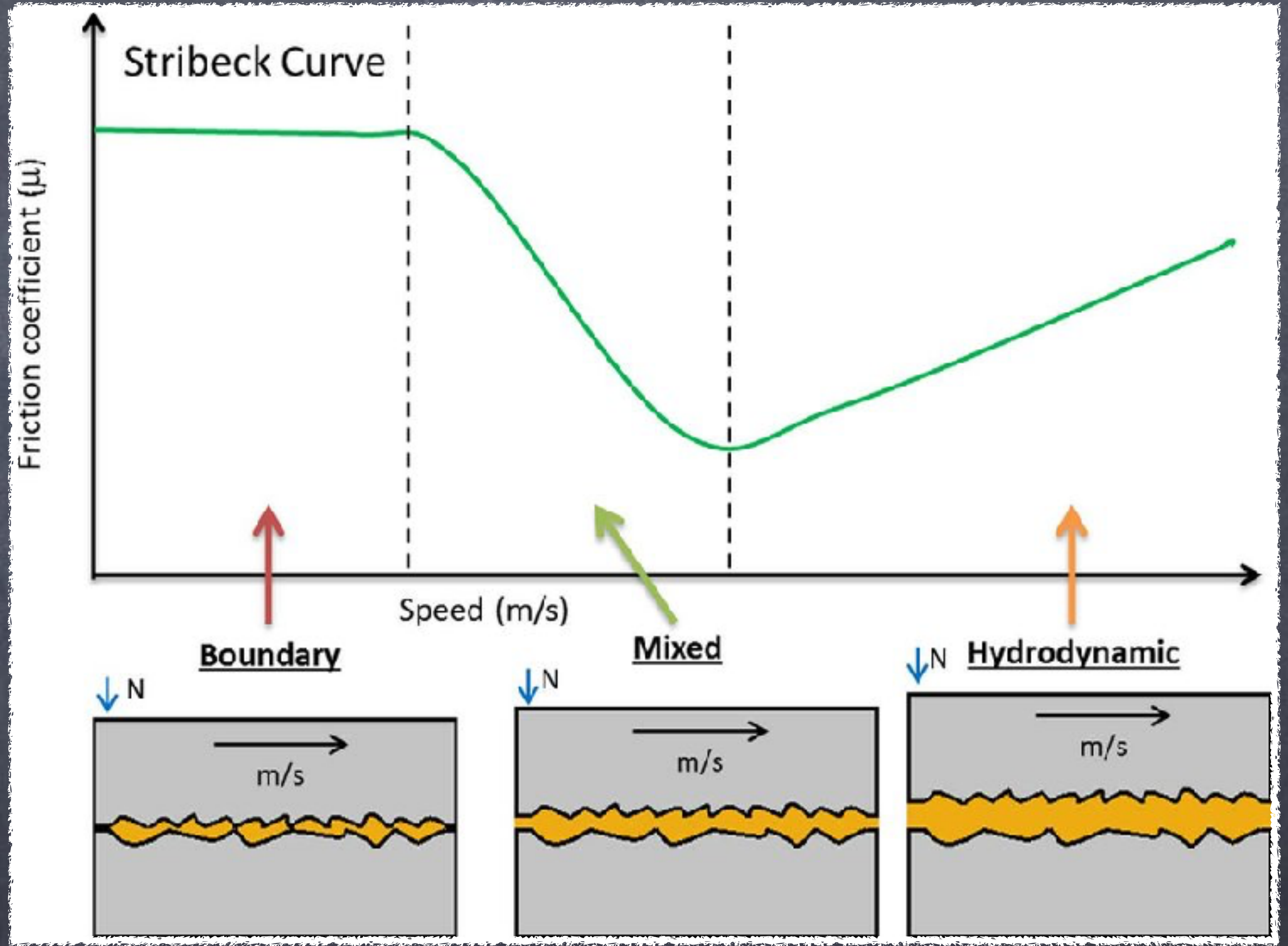


$m=1 \quad k=1 \quad \gamma=0 \quad x_0=0 \quad v_0=0$

$f_k=0.1 \qquad f_s=0.3$

nepovinné poznámky k treniu

- veľmi zaujímavým príkladom súhry statického a kinetického trenia je husľový sláčik (pozri napr. článok Čo tam robí sláčik? z knihy Jeden výdych koňa, ktorý je k dispozícii aj v materiáloch k tejto prednáške)
- závislosťou trenia od rôznych vecí, od ktorých v tých najjednoduchších prípadoch nezávisí (napr. rýchlosti) sa zaoberá celá jedna inžinierska oblasť, takzvaná tribológia



typická závislosť kinetického koeficientu trenia od rýchlosti

kontaktná sila

- Pri kontakte dvoch telies vznikajú komplikované elastické sily, ktoré sa často prejavujú len celkom nepatrnými deformáciami a ktorých výsledkom sú také sily, aby ani jedno teleso nepustilo to druhé teleso na svoje miesto.
- Všelijaké podložky, mantinely, naklonené roviny a podobne teda vytvárajú také sily (elastickej povahy), ktoré bránia iným telesám preniknúť dovnútra.

Čo sme sa naučili (veľmi dôležité zhrnutie)

- Pohyb telies vieme predpovedať metódou krok za krokom
- V tejto metóde potrebujeme poznať zrýchlenie a to získame zo zákona sily zapísaného ako $\vec{a} = \vec{F}/m$
- Na získanie zrýchlenia potrebujeme poznať pôsobiace sily. Tých nie je veľa. V podstate len gravitačná, elektrická a magnetická. Iné sily (trenie, odpor, pružnosť) sú vlastne iba dôsledkami elektrických síl. Vo všeobecnosti sú komplikované, ale často sú pomerne jednoduché. Nám v tomto kurze stačí vedieť predpovedať pohyb pre tie jednoduché prípady.

upútavka na záver

- Týmto je ukončená prvá časť kurzu mechaniky, venovaná metóde "krok za krokom"
- Nasledovať bude druhá časť, v ktorej sa naučíme riešiť Newtonovu pohybovú rovnicu (zákon sily) Newtonovou metódou "celý pohyb naraz". Pôjde o základnú a najdôležitejšiu matematickú metódu celej fyziky.