

Mimoriadne užitočný nástroj



Taylorov rad, čiže kladivo matematikovo

mechanika 7

užitečná prešmyčka



v tejto časti sa dozvieme, ako jednoduchým prepísaním definície okamžitej rýchlosti (derivácie) dostaneme do rúk prekvapujúco účinný nástroj, pomocou ktorého rýchlo a ľahko dokážeme niekoľko veľmi užitočných tvrdení



užitočný prepis definície derivácie

- ❖ nech je nejaké teleso v čase t v mieste $x(t)$ a pohybuje sa rýchlosťou $v(t)$ (nepoznáme celé funkcie, len ich hodnoty v jednom konkrétnom čase t) kde bude teleso o krátky čas Δt ?
- ❖ z definície okamžitej rýchlosti okamžite dostaneme (toto je tá prešmyčka)
$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t + \dots$$
kde tie tri bodky sú za členy, ktoré pre Δt klesajúce k nule klesajú k nule ešte rýchlejšie ako to Δt (bodky sme zdedili z limity, ktorá je prítomná v slovách o “ešte rýchlejšom poklese” – premýslite si, že je to naozaj tak)
- ❖ tento triviálny prepis sa ukáže byť prekvapujúco silnou zbraňou

prvý príklad užitočnosti

naša stará dobrá metóda “krok za krokom”

- ❖ je založená na predpoklade, že na tie tri bodky môžeme pri dostatočne malom kroku Δt pokojne zabudnúť, a teda písať $x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t$
- ❖ v našej metóde “krok za krokom” v mechanike sme to doplnili rovnakou úvahou pre rýchlosť a zrýchlenie, čo nám dalo $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t$
- ❖ pri akom Δt si už môžeme dovoliť úplne zabudnúť na tri bodky?
pri žiadnom, ale čím menšie Δt , tým menšie tri bodky a teda menšia chyba a presnejší výsledok (presný výsledok dostaneme v limite $\Delta t \rightarrow 0$)

druhý príklad užitočnosti

súvis určitého a neurčitého integrálu

- ❖ určitý integrál (od t_0 do t) z rýchlosti $v(t)$ je definovaný ako limita našej metódy “krok za krokom” pre dĺžku kroku idúcu k nule ($\Delta t \rightarrow 0$).

označenie: $\int_{t_0}^t dt' v(t')$ (dt' hovorí podľa čoho integrujeme, $v(t')$ čo integrujeme)

- ❖ neurčitý integrál z rýchlosti $v(t)$ je definovaný ako opak derivácie, čiže ako taká funkcia, ktorej rýchlosťou (deriváciou podľa času) je práve $v(t)$

označenie: $\int dt v(t)$

- ❖ jedno aj druhé je $x(t)$, čiže

$$\int dt v(t) = \int_{t_0}^t dt' v(t')$$

(Newton-Leibnizova veta)

tretí príklad užitočnosti

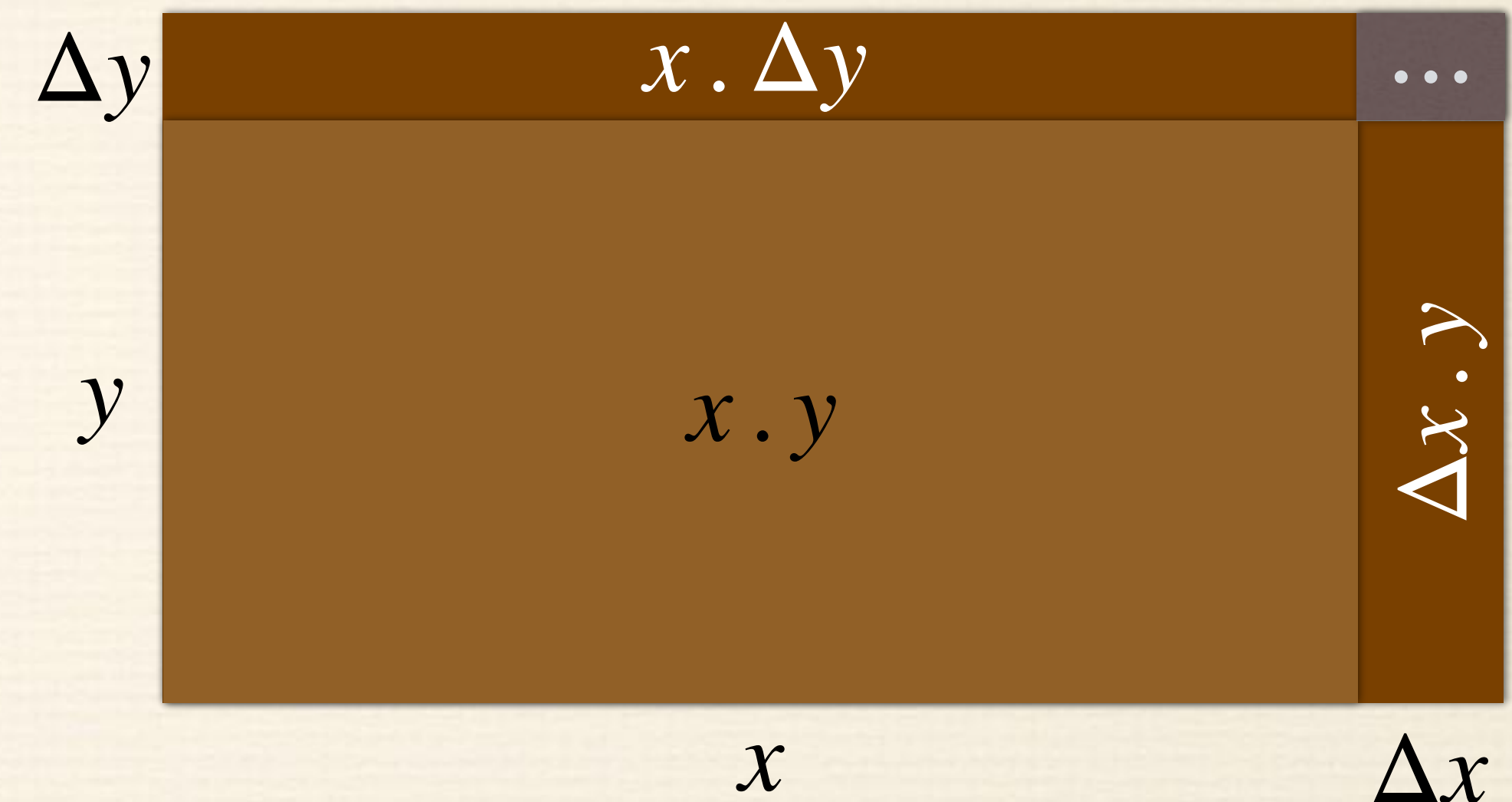
rýchlosť zmeny súčinu (derivácia súčinu)

$$\diamond \frac{d}{dt}x(t)y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t)y(t + \Delta t) - x(t)y(t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ teraz: } x(t + \Delta t) \cdot y(t + \Delta t) &= \\ &= (x(t) + \dot{x}(t)\Delta t + \dots) \cdot (y(t) + \dot{y}(t)\Delta t + \dots) \\ &= x(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot \dot{y}(t)\Delta t + \dot{x}(t) \cdot y(t)\Delta t + \dots \end{aligned}$$

$$\diamond \text{ čiže: } \frac{d}{dt}x(t) \cdot y(t) = x(t) \cdot \dot{y}(t) + \dot{x}(t) \cdot y(t)$$

Leibnizovo pravidlo



$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$\Delta x = \dot{x}(t)\Delta t$$

$$\Delta y = \dot{y}(t)\Delta t$$

štvrtý príklad užitočnosti rýchlost' (derivácia) zloženej funkcie

❖ zložená funkcia: funkcia premennej y , ktorá je funkciou premennej t

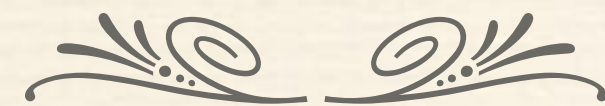
$$\frac{d}{dt} f(y(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(y(t + \Delta t)) - f(y(t))}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \text{❖ teraz: } f(y(t + \Delta t)) &= f(y(t) + \dot{y}(t) \cdot \Delta t + \dots) \\ &= f(y(t)) + f'(y(t)) \cdot (\dot{y}(t)\Delta t + \dots) + \dots \end{aligned}$$

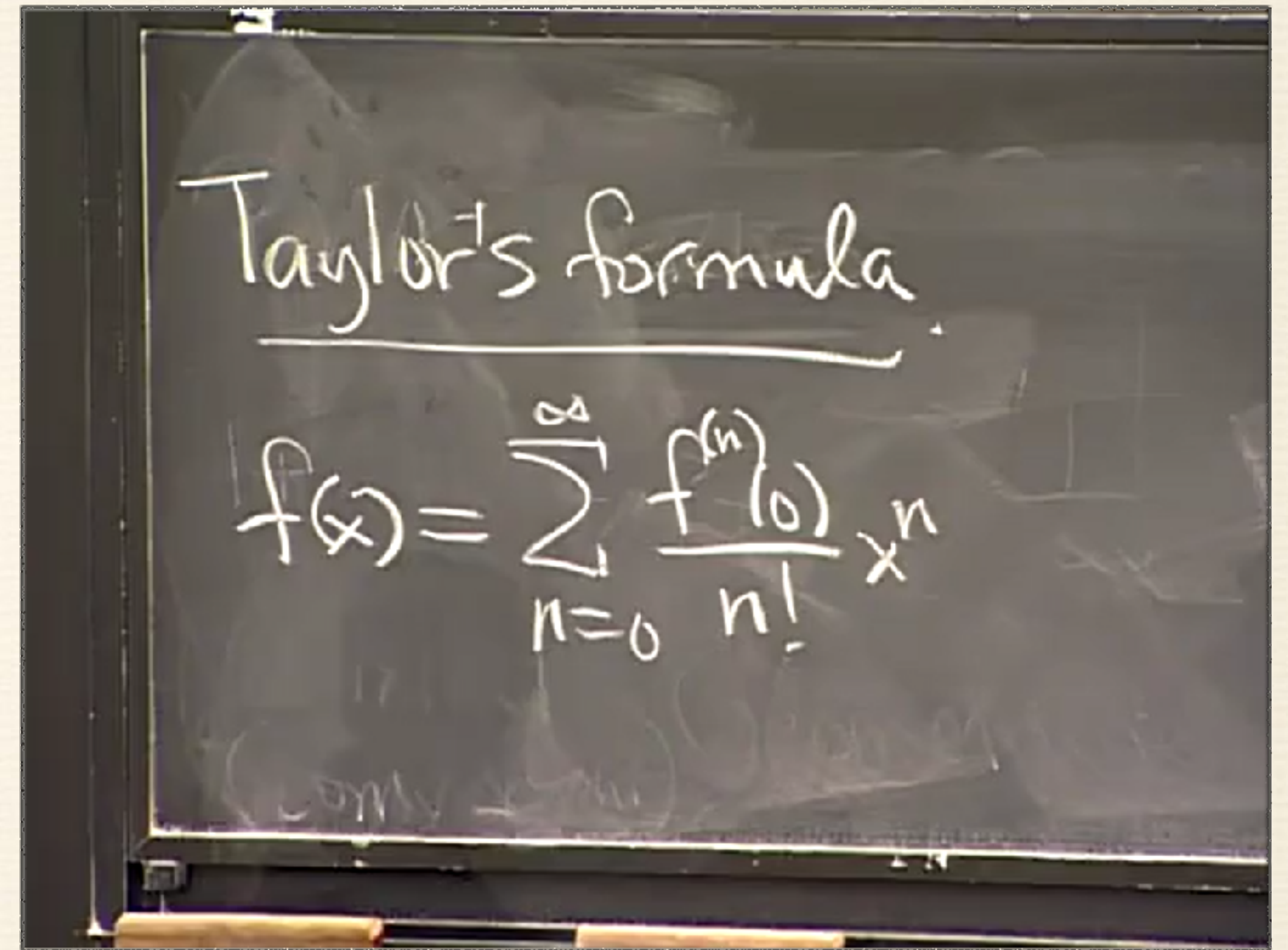
$$\text{❖ čiže: } \frac{d}{dt} f(y(t)) = f'(y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

(čiarka = derivácia podľa y
bodka = derivácia podľa t)

od troch bodiek k Taylorovmu radu



*v tejto časti si povieme, ako sa dá spresňovaním
približného vzťahu získaného prešmyškou
získať presný vzťah, ktorý bude ešte užitočnejší*



čo skrývajú tri bodky

- ❖ vo všetkých príkladoch užitočnosti vzťahu $x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t + \dots$ sme tri bodky v limite $\Delta t \rightarrow 0$ zanedbali (lebo boli zanedbateľné)
- ❖ ďalšiu mimoriadne užitočnú vec dostaneme, keď Δt nepošleme do nuly a pokúsime sa zistiť, čo sa skrýva v troch bodkách
- ❖ zistíme to tak, že opakovane použijeme náš vzťah s tromi bodkami, v ktorom tri bodky zanedbáme (keď budú zanedbateľné)
- ❖ to, čo dostaneme, považoval Newton za svoj najväčší matematický objav (aj keď sa to volá podľa Newtonho mladšieho kolegu Brooka Taylora)

čo skrývajú tri bodky – začiatok

- ❖ začnime s tým, že pre nejaké teleso poznáme v čase t (a len v tomto čase) polohu $x(t)$, rýchlosť $v(t)$ aj zrýchlenie $a(t)$. Kde bude teleso v čase $t + \Delta t$?
- ❖ akú bude mať v čase $t + \Delta t$ rýchlosť, to už vieme (keďže rýchlosť sa má k zrýchleniu rovnako ako poloha k rýchlosti) $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t + \dots$
- ❖ akú bude mať v čase $t + \Delta t$ polohu, to vieme tiež (keďže až na tri bodky sa rýchlosť mení ako pri rovnomernej zrýchlenej pohybe, aj poloha sa bude meniť ako pri rovnomernej zrýchlenej pohybe)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a(t) \cdot (\Delta t)^2 + \dots$$

- ❖ poznámka: $x(t)$, $v(t)$ a $a(t)$ sú konštanty (hodnoty v konkrétnom čase t)

drobná zmena označenia

- ❖ v ďalšom bude užitočné zmeniť označenie nasledovným spôsobom: čas budeme merať od momentu t (to znamená, že náš počiatkový čas bude 0) a namiesto Δt môžeme písať t (lebo toto písmeno sa nám práve uvoľnilo)
- ❖ prechod medzi pôvodným a novým označením: $t \leftrightarrow 0$ $\Delta t \leftrightarrow t$
- ❖ v novom označení máme zadané $x(0)$, $v(0)$, $a(0)$ a hľadáme $x(t)$
- ❖ celý postup bude teraz založený na tom, že poznáme okamžitú rýchlosť (deriváciu) pre mocninovú funkciu: $\frac{d}{dt}t^n = n \cdot t^{n-1}$ (pozri minulú prednášku)

starý výsledok v novom označení

- ❖ môžeme len triválne prepísať, ale môžeme aj znova a trochu inak odvodiť
- ❖ ak by sme náhodou nepoznali vzťahy pre rovnomerne zrýchlený pohyb, mohli by sme postupovať nasledovne:
- ❖ zrýchlenie je $\ddot{x}(t) = a(t) = a(0) + \dots$
(tieto tri bodky sú za prípadné zmeny zrýchlenia, ktoré nepoznáme)
- ❖ rýchlosť je $\dot{x}(t) = v(0) + a(0) \cdot t + \dots$ (pretože $\frac{d}{dt}t^n = n \cdot t^{n-1}$)
- ❖ a poloha je $x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{1}{2}a(0) \cdot t^2 + \dots$ (pretože $\frac{d}{dt}t^n = n \cdot t^{n-1}$)

čo skrývajú tri bodky – pokračovanie

- ❖ pokračujme teraz ďalej s tým, že pre nejaké teleso poznáme v čase 0 (a len v tomto čase) polohu $x(0)$, rýchlosť $v(0)$, zrýchlenie $a(0)$ a ešte aj rýchlosť zmeny zrýchlenia $b(0)$. Kde bude teleso v čase t ?
- ❖ rýchlosť zmeny zrýchlenia je $\ddot{x}(t) = b(t) = b(0) + \dots$
- ❖ zrýchlenie je $\ddot{x}(t) = a(0) + b(0) \cdot t + \dots$ $\left(\frac{d}{dt}t^n = n \cdot t^{n-1}\right)$
- ❖ rýchlosť je $\dot{x}(t) = v(0) + a(0) \cdot t + \frac{1}{2} b(0) \cdot t^2 + \dots$ $\left(\frac{d}{dt}t^n = n \cdot t^{n-1}\right)$
- ❖ a poloha je $x(t) = x(0) + v(0) \cdot t + \frac{1}{2} a(0) \cdot t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} b(0) \cdot t^3 + \dots$ $\left(\frac{d}{dt}t^n = n \cdot t^{n-1}\right)$

kde sa zobrala tá trojka v menovateli?

- ❖ malo by to byť jasné, ale pre istotu si to povedzme úplne po lopate
- ❖ z toho, že $\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$ vyplýva, že funkcia $\frac{1}{n}t^n + c$ je tou funkciou, ktorej derivácia je t^{n-1} (zapísané pomocou integrálu: $\int dt t^{n-1} = \frac{1}{n}t^n + c$)
- ❖ čiže $\int dt t = \frac{1}{2}t^2 + c$ $\int dt \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3}t^3 + c$ $\int dt \frac{1}{2} \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4}t^4 + c$
- ❖ vo všeobecnosti: $\int dt \frac{1}{1.2.\dots.(n-1)}t^{n-1} = \frac{1}{n!}t^n + c$

čo skrývajú tri bodky – úloha

❖ nech pre nejaké teleso poznáme v čase 0 (a len v tomto čase) $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $\ddot{x}(0)$, $\ddot{\ddot{x}}(0)$, $\ddot{\ddot{\ddot{x}}}(0)$. Kde bude teleso v čase t ?

❖ správna odpoveď:

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0) \cdot t + \frac{1}{2} \ddot{x}(0) \cdot t^2 + \frac{1}{2.3} \ddot{\ddot{x}}(0) \cdot t^3 + \frac{1}{2.3.4} \ddot{\ddot{\ddot{x}}}(0) \cdot t^4 + \dots$$

❖ ako by vyzeral pohyb v prípade, že by sme v čase 0 poznali polohu a ďalších 256 derivácií?

❖ správna odpoveď:

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0) \cdot t + \frac{\ddot{x}(0)}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^{(n)}(0) \cdot t^n + \dots + \frac{1}{256!} x^{(256)}(0) \cdot t^{256} + \dots$$

pričom $n! = 1.2.3 \dots .n$ (číta sa n-faktoriál) a $x^{(n)}(t)$ znamená n-tú deriváciu

čo skrývajú tri bodky – dokončenie

- ❖ nech pre nejaké teleso poznáme v čase 0 (a len v tomto čase) všetky derivácie
Kde bude teleso v čase t ?
- ❖ z predchádzajúceho by malo byť jasné, že správna odpoveď má tvar

$$x(t) = x(0) + \frac{x^{(1)}(0)}{1!} t + \frac{x^{(2)}(0)}{2!} t^2 + \frac{x^{(3)}(0)}{3!} t^3 + \dots$$

kde tri bodky už nestoja za nejaké nešpecifikované zanedbateľné členy,
ale znamenajú opakovanie rovnakej štruktúry $+ \frac{x^{(n)}(0)}{n!} t^n$ až donekonečna

- ❖ tento súčet sa volá Taylorov rad a je to veľmi užitočný matematický nástroj



učený zápis Taylorovho radu

- ❖ ak definujeme pre nulu symboly $x^{(0)}(t) = x(t)$, $0! = 1$ a $t^0 = 1$, potom môžeme Taylorov rad zapísať ako

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n$$

- ❖ ak sa vrátíme k pôvodnému označeniu ($t \leftrightarrow 0$, $\Delta t \leftrightarrow t$) Taylorov rad dostane tvar

$$x(t + \Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(t)}{n!} \cdot (\Delta t)^n$$

ako používal kladivo Newton

- ❖ akékoľvek rovnice obsahujúce nejaké funkcie (a prípadne aj ich derivácie) riešil Newton tak, že všetky funkcie rozložil do ich Taylorových radov (neznámu funkciu do radu s neznámymi koeficientami)
- ❖ potom porovnal koeficienty pri jednotlivých mocninách premennej, čím našiel neznáme koeficienty (Taylorovho radu neznámej funkcie)
- ❖ ak bol výsledný rad Taylorovým radom nejakej známej funkcie, tak práve ukázal, že tá funkcia je riešením rovnice
- ❖ ak výsledný rad nebol Taylorovým radom nejakej známej funkcie, tak mal riešenie v tvare nekonečného radu



príklad na záver

- ❖ nájdime funkciu $x(t)$, ktorá spĺňa rovnicu: $\dot{x}(t) = x(t)$
- ❖ nech $x(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots$ (Taylorov rad s neznámymi koeficientmi)
- ❖ dosadíme do rovnice: $c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2 + 4c_4t^3 + \dots = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots$
- ❖ porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách t dostaneme:
$$\begin{array}{ccccccc} c_1 = c_0 & 2c_2 = c_1 & 3c_3 = c_2 & 4c_4 = c_3 & \dots & & \\ c_1 = c_0 & c_2 = \frac{1}{2}c_0 & c_3 = \frac{1}{2.3}c_0 & c_4 = \frac{1}{2.3.4}c_0 & \dots & & \end{array}$$
- ❖ čiže $x(t) = c_0 \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right)$
ktorá funkcia má takýto Taylorov rad sa dozvieme na budúcej prednáške