Užitočný nástroj v akcii

Taylorov rad sínusu, cosínusu a exponenty

mechanika 8

užitočnosť Taylorovho radu

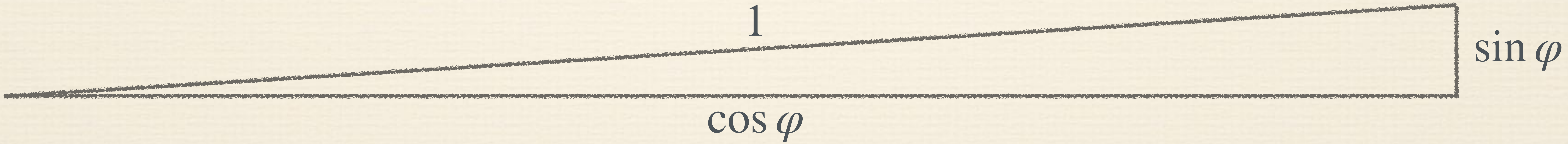
v tejto časti nájdeme Taylorov rad pre sínus a cosínus a ukážeme si, ako pomocou nich vypočítame sínus a cosínus bez akýchkoľvek trojuholníkov (to ocenia najmä počítače, ktoré si trojuholníky príliš dobre kresliť nevedia)

derivácie sínusu a cosínusu

- najprv vypočítame okamžité rýchlosti pre sínusový a cosínusový pohyb (tie budeme potrebovať nielen teraz, ale ešte veľakrát v tomto kurze)

- k výpočtu rýchlostí budeme potrebovať súčtové vzorce pre sínus a cosínus
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

- a ešte budeme potrebovať, že pre $\varphi \to 0$ sa sínus a cosínus chovajú ako
$\sin\varphi = \varphi + \cdots \qquad \cos\varphi = 1 + \cdots \qquad$ kde $\cdots$ obsahujú φ^2 alebo vyššie mocniny
(toto sa nahliadne z obrázku a z Pytagorovej vety – tú treba na tie tri bodky)



aká je rýchlosť, ak je pohyb $x(t) = \sin t$?

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin t}{\Delta t}$$

$$\sin(t + \Delta t) = \sin t \,.\, \cos \Delta t + \cos t \,.\, \sin \Delta t = \sin t + \underbrace{\cos t \,.\, \Delta t + \cdots}_{\text{obsahuje } (\Delta t)^2 \text{ a vyššie mocniny}}$$

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin t + \cos t \,.\, \Delta t + \cdots - \sin t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (\cos t + \underbrace{\cdots}_{\text{obsahuje } \Delta t \text{ a vyššie mocniny}}) = \cos t$$

$$\boxed{\frac{d \sin t}{dt} = \cos t}$$

aká je rýchlosť, ak je pohyb $x(t) = \cos t$?

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cos(t + \Delta t) - \cos t}{\Delta t}$$

$$\cos(t + \Delta t) = \cos t \,.\, \cos \Delta t - \sin t \,.\, \sin \Delta t = \cos t - \sin t \,.\, \Delta t + \overbrace{\cdots}^{\substack{\text{obsahuje } (\Delta t)^2 \\ \text{a vyššie mocniny}}}$$

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cos t - \sin t \,.\, \Delta t + \cdots - \cos t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{(-\sin t + \cdots)}_{\substack{\text{obsahuje } \Delta t \\ \text{a vyššie mocniny}}} = -\sin t$$

$$\boxed{\frac{d \cos t}{dt} = -\sin t}$$

všetky derivácie sínusu a cosínusu

- z toho, že sínus a cosínus sú si navzájom deriváciami (až na znamienko) vyplýva, že poznáme všetky ich derivácie
- prvé štyri derivácie funkcie $\sin t$ sú $\cos t,\ -\sin t,\ -\cos t,\ \sin t$
  a potom sa to opakuje (pre t=0 sú hodnoty derivácií postupne 1, 0, -1, 0)
- prvé štyri derivácie funkcie $\cos t$ sú $-\sin t,\ -\cos t,\ \sin t,\ \cos t$
  a potom sa to opakuje (pre t=0 sú hodnoty derivácií postupne 0, -1, 0, 1)
- ak poznáme všetky derivácie, vieme napísať celý Taylorov rad

Taylorov rad pre sínus a cosínus

- z nájdených derivácií máme okamžite

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \cdots$$
$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots$$

- presne takto počítajú sínus a cosínus kalkulačky a počítače
  skúsme napríklad $\sin 2$

$$\begin{aligned} \sin 2 &= 2 - \frac{1}{3!}2^3 + \frac{1}{5!}2^5 - \frac{1}{7!}2^7 + \cdots \\ &= 2 - 1.3333\cdots + 0.2666\cdots - 0.0254\cdots + 0.0014\cdots - 0.00005\cdots + \cdots \\ &= 0.9093\cdots \end{aligned}$$

najkrajšia teoréma

v tejto časti pomocou Taylorových radov dokážeme vzťah, ktorý je všeobecne považovaný za najkrajšie matematické tvrdenie všetkých čias (pôjde nám hlavne o ilustráciu sily Taylorových radov, ale aj samotné tvrdenie sa nám zíde)

„V roku 1988 usporiadal časopis The Mathematical Intelligencer anketu, v ktorej čitatelia volili najkrajšie matematické tvrdenie (teorému) všetkých čias. Jasnou jednotkou sa stalo tvrdenie o fascinujúcom súvise piatich čísiel, z ktorých každé reprezentuje nejakú významnú časť matematiky a súčasne aj dôležitú etapu v histórii tejto vedy. Ide o vzťah $e^{i\pi} + 1 = 0$*, ktorý matematici považujú za krásne jednoduchý a jednoducho krásny.“*

–Dva hrby ťavy

číslo *e*

- ak si vložím 1€ na účet s úrokom 100%, koľko mám dostať po roku späť?
- ak sa úrok počíta len raz (na konci roka), potom 2€ (1€ dlh, 1€ úrok)
- ak by sa úročilo mesačne (ako $\frac{1}{12}$ zo 100%), bol by výsledok $(1+\frac{1}{12})^{12} = 2.613\cdots$
- ak by sa úročilo dennne (ako $\frac{1}{365}$ zo 100%), bolo by to $(1+\frac{1}{365})^{365} = 2.714\cdots$
- ak by sa úrok počítal kontinuálne (čo by bolo pre mňa najvýhodnejšie), výsledok by bol $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a práve to je definícia Eulerovho čísla *e*

exponenciálna funkcia e^t

- pokračujme v príklade: koľko by som mal dostať po t rokoch?
- ak by sa úročilo vždy po roku, tak $(1+1)^t$ (premyslite si to)
- ak by sa úročilo už po mesiaci, tak $(1+\frac{1}{12})^{12t}$ (mesiacov je $12t$)
- ak by sa úročilo spojito, tak $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n.t}$ a práve to je definícia funkcie e^t
- dá sa to písať aj v tvare $e^t = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{t}{m}\right)^{m}$ (stačí položiť $m = n\,.\,t$)
- tej definícii sa tu venujeme preto, lebo je to mimoriadne dôležitá funkcia

dôležitá vlastnosť exponenciálnej funkcie

$$e^{t+t'} = e^t \,.\, e^{t'}$$

- aby sme to nahliadli, uvažujme vklad N € $-$ koľko mám dostať späť?

- pri akomkoľvek úročení N-násobok toho, koľko som dostal pri vklade 1 € (všetky tie percentá určujú len to, koľkonásobok svojho vkladu dostanem ak je napr. úrok 10%, dostanem pri jednom úročení 1.1-násobok vkladu, ak je úrok 100% dostanem pri jednom úročení 2-násobok vkladu, a podobne)

- preskúmajme teraz dvomi rôznymi spôsobmi, koľko mám dostať, ak vložím 1 € po t rokoch je z nich $N = e^t$ a po ďalších t' rokoch je z toho $N \,.\, e^{t'} = e^t \,.\, e^{t'}$ toto je zároveň výnos z 1 € po $t + t'$ rokoch, čiže $e^{t+t'}$ a to je možné len ak $e^{t+t'} = e^t \,.\, e^{t'}$

aká je rýchlosť, ak je pohyb $x(t) = e^t$?

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{t+\Delta t} - e^t}{\Delta t}$$

$$e^{t+\Delta t} = e^t \,.\, e^{\Delta t} = e^t \,.\, \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\Delta t}{m}\right)^m = e^t \,.\, (1 + \overbrace{\Delta t + \cdots}^{\text{obsahuje } (\Delta t)^2 \text{ a vyššie mocniny}})$$

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^t \,.\, (1 + \Delta t + \cdots) - e^t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (e^t + \underbrace{\cdots}_{\text{obsahuje } \Delta t \text{ a vyššie mocniny}}) = e^t$$

$$\boxed{\frac{de^t}{dt} = e^t}$$

Taylorov rad pre exponenciálnu funkciu

- keďže prvá derivácia exponenciálnej funkcie je ona sama, tak aj každá ďalšia jej derivácia je ona sama (furt derivujeme exponenciálnu funkciu)
- všetky derivácie funkcie e^t sú e^t (a ich hodnoty v nule sú $e^0 = 1$)
- ak poznáme všetky derivácie, vieme napísať celý Taylorov rad

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots$$

- poznámka: toto je presne ten Taylorov rad, ktorý sme dostali ako riešenie rovnice $\dot{x}(t) = x(t)$ Newtonovou metódou: čiže riešením rovnice je $x(t) = e^t$ (na to sme medzitým prišli aj inak, ale to neznižuje silu tej metódy)

číslo i

- druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná
- občas by sa nám ale hodili čísla so zápornou druhou mocninou (napríklad v algebre pri riešení rovníc)
- tak si matematici vymysleli jedno také číslo a nazvali ho imaginárnym
- to číslo sa označuje symbolom i a jeho definícia je takáto: $i^2 = -1$
- komplexné čísla $a + bi$ (kde a, b sú reálne) vyzerajú ako komplikovaný výmysel, ale často sú prekvapujúco o dosť jednoduchšie ako reálne čísla

funkcie komplexných čísiel

- sú často definované práve pomocou Taylorovho rozvoja (umocňovať a násobiť komplexné čísla vieme, takže sú to dobré definície)

- napr. exponenciálna funkcia imaginárneho čísla $i\varphi$ je definovaná ako $e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \frac{1}{5!}(i\varphi)^5 + \cdots$

- vypočítame mocniny čísla i : $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ldots$

- takže nakoniec dostávame: $e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{1}{3!}i\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{5!}i\varphi^5 + \cdots$

Eulerov vzťah

- ako vyzerá reálna a imaginárna časť výrazu
  $e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{1}{3!}i\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \frac{1}{5!}i\varphi^5 + \cdots$
- to je jednoduché: $e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \cdots\right) + i\left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \cdots\right)$
- pozriem lepšie a čo nevidím:
  reálna časť a imaginárna časť sú Taylorove rady pre $\cos\varphi$ a $\sin\varphi$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

číslo π

- obvod kruhu je úmerný jeho polomeru, konštanta úmernosti sa volá 2π (toto je definícia čísla π)
- uhol meraný v radiánoch je daný dĺžkou oblúka na jednotkovej kružnici
- čiže plný uhol má hodnotu 2π, priamy uhol hodnotu π, pravý uhol $\pi/2$
- sínus a cosínus priameho uhla sú 0 a -1

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

- miss teoréma – prekvapujúce spojenie matematickej analýzy (e), algebry (i) a geometrie (π) – elegantne dokázaná pomocou Taylorových radov

pár slov na záver

- čo z tejto prednášky bude pre nás v tomto kurze najdôležitejšie:
  - derivácie sínusu, cosínusu a exponenciálnej funkcie
  - Eulerov vzťah $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
  - Taylorov rad všeobecne aj konkrétnych funkcií
- všetko to využijeme už o chvíľu pri riešení Newtonovej pohybovej rovnice v rôznych situáciách, medzi nimi aj v jednej z najdôležitejších situácií v celej fyzike, ktorej sa hovorí lineárny harmonický oscilátor