Základný jazyk fyziky

diferenciálne rovnice a ako ich riešiť

mechanika 9

povzdych na úvod

Ach, keby všetky sily záviseli len od času, to by bolo sveta žiť.

- zákon sily by vyzeral takto: $m\,.\,\ddot{x}(t) = F(t)$
- čo by sme napísali takto: $m\,.\,\dot{v}(t) = F(t) \qquad \dot{x}(t) = v(t)$
- a vyriešili takto: $v(t) = \int dt\ \frac{1}{m}F(t) \qquad x(t) = \int dt\ v(t)$
- čiže všetky odpovede by nám poskytlo dvojnásobné integrovanie
- lenže sily závisia aj od iných vecí, nielen do času

všeobecná podoba zákona sily

$$\boxed{m\,.\,\ddot{x}(t) = F\left(x(t), \dot{x}(t), t\right)}$$

- sila môže byť (a aj býva) funkciou polohy, rýchlosti aj času
- rovnici obsahujúcej neznámu funkciu a jej derivácie hovoríme diferenciálna
- základná úloha mechaniky (zistiť ako bude vyzerať pohyb, ak poznáme sily) teda vedie na riešenie rôznych diferenciálnych rovníc
- čo je vo všeobecnosti oveľa ťažšia úloha ako integrovanie

smutná pravda o diferenciálnych rovniciach

Nepoznáme všeobecný recept na ich riešenie.

- v zásade sú dva typy diferenciálnych rovníc:
  jedny (tzv. lineárne) s ktorými si vieme dosť dobre poradiť
  druhé (tzv. nelineárne) s ktorými si väčšinou nevieme poradiť
- v mechanike sa stretávame s obidvomi typmi
- v iných oblastiach fyziky tiež s obidvomi typmi,
  pričom lineárne diferenciálne rovnice sa našťastie vyskytujú pomerne často

lineárne diferenciálne rovnice

Newtonova rovnica pre oscilátor (mechanika)

Maxwellove rovnice (elektrodynamika)

Schrödingerova rovnica (kvantová mechnika)

nelineárne diferenciálne rovnice

Newtonova rovnica pre kyvadlo (mechanika)

Navier-Stokesova rovnica (hydrodynamika)

Einsteinova rovnica (všeobecná teória relativity)

kedy je diferenciálna rovnica lineárna

Keď obsahuje každú deriváciu len v prvej mocnine (alebo vôbec nie).

- medzi derivácie funkcie počítame aj samotnú funkciu (nultá derivácia)
- súčin dvoch derivácií nie je považovaný za prvú mocninu
  čiže lineárna rovnica nemôže obsahovať veci ako $\dot{x}(t)\,.\,\ddot{x}(t)$
- funkcie sú považované za vyššie mocniny (Taylorov rad)
- čiže lineárna diferenciálna rovnica má vo všeobecnosti takýto tvar:

$$a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)\ddot{x}(t) + \cdots + a_n(t)x^{(n)}(t) = b(t)$$

lineárne diferenciálne rovnice

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

$$m\,\ddot{x}(t) + \gamma\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = F_0 \sin t$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi''(x) \;+\; \frac{1}{2}m\,\omega^2 x^2 \psi(x) = E\,\psi(x)$$

nelineárne diferenciálne rovnice

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) + K\,x^3(t) = 0$$

$$m\,\ddot{x}(t) + \kappa\,M\,m\,x^{-2}(t) = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + mgl\sin\varphi(t) = 0$$

tri dôležité tvrdenia

vďaka ktorým budeme vedieť vyriešiť niektoré významné diferenciálne rovnice

- veta o existencii a jednoznačnosti riešenia
  táto veta nám umožní používať uhádnutie ako rigoróznu metódu riešenia
  ak riešenie uhádneme, na základe tejto vety vieme, že viac ich už neexistuje

- princíp superpozície
  platí len pre lineárne diferenciálne rovnice a práve vďaka nemu sú “ľahké”

- Eulerov recept (hádania riešenia)
  platí len pre niektoré lineárne diferenciálne rovnice, ale tie úplne vyrieši

veta o existencii a jednoznačnosti riešenia

Každá slušná diferenciálna rovnica ***spolu s počiatočnými podmienkami***
má práve jedno riešenie, t.j. riešenie existuje a je jednoznačné

- počiatočnými podmienkami sú počiatočná poloha a rýchlosť: x_0, v_0
(ak je rád rovnice, t. j. stupeň najvyššej derivácie, rovný n, potom sú poč. podm. dané hodnotami derivácií od nultej až po n-1 v počiatočnom čase)

- klebeta: pod slušnosťou diferenciálnej rovnice $m\,.\,\ddot{x}(t) = F\left(x(t), \dot{x}(t), t\right)$
tu rozumieme spojitosť funkcie F a jej prvých parciálnych derivácií
(čo presne je parciálna derivácia v tejto chvíli vedieť nepotrebujeme)
(klebeta pre diferenciálne rovnice iných rádov znie úplne analogicky)

pár slov k dôkazu

Dôkaz necháme na prednášku z matematiky.

- v metóde krok za krokom je existencia aj jednoznačnosť úplne jasná. (v každom kroku dostávame riešenie o kúsok ďalej, a to jednoznačne)
- otázka je, či to tak ostane aj v limite “nekonečne malého kroku”
- dôkaz sa robí tak, že sa vezme trochu iná približná metóda (nie krok za krokom, ale čosi podobné) a o tejto metóde sa ukáže, že spomínanú limitu v pohode prežije (ak je rovnica slušná).

princíp superpozície pre lineárne dif. rovnice

Toto je to kúzlo, ktoré robí z lineárnych diferenciálnych rovníc relatívne zvládnuteľnú vec.

- superpozíciou (alebo tiež lineárnou kombináciou) funkcií $x_1(t)$ a $x_2(t)$ nazývame funkciu $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ kde c_1 a c_2 sú ľubovoľné konštanty

- princíp superpozície: ak sú dve funkcie $x_1(t)$ a $x_2(t)$ riešeniami lineárnej diferenciálnej rovnice $a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)\ddot{x}(t) = b(t)$ s dvomi pravými stranami $b_1(t)$ a $b_2(t)$, potom ich superpozícia $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ je riešením tejto rovnice s pravou stranou $c_1 b_1(t) + c_2 b_2(t)$

- dôkaz: pozriem, vidím (derivácia superpozície je superpozícia derivácií)
  úloha: napriek triviálnosti si ten dôkaz samostatne poriadne urobte

lineárne rovnice s nulovou pravou stranou

Ak je pravá strana nulová, potom z n nezávislých riešení dostanem všeobecné riešenie.

- pre rovnicu $a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)\ddot{x}(t) = 0$ je superpozícia riešení $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ riešením tej istej rovnice (lebo superpozícia núl je nula)
- konštanty c_1, c_2 môžeme určiť z počiatočných podmienok: $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$
- $c_1x_1(0) + c_2x_2(0) = x_0,\ \ c_1\dot{x}_1(0) + c_2\dot{x}_2(0) = v_0$ sú 2 rovnice pre 2 neznáme c_1, c_2 (pretože pri známych funkciách $x_1(t)$ a $x_2(t)$ sú $x_1(0), \cdots$ konkrétne známe čísla)
- ak sú funcie $x_1(t)$ a $x_2(t)$ nezávislé (t.j. ak jedna nie je násobkom druhej), potom dostaneme jednoznačne c_1, c_2 a tým pádom máme (jediné!) riešenie

lineárne rovnice s nenulovou pravou stranou

Pre rovnicu s nenulovou pravou stranou nám stačí nájsť navyše už len jedno jediné riešenie.

- nech $x_p(t)$ je nejakým riešením rovnice $a_0(t)x(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)\ddot{x}(t) = b(t)$ toto riešenie sa nazýva partikulárne (čiastočné)

- všeobecným riešením rovnice s nenulovou pravou stranou je súčet partikulárneho riešenia a všeobecného riešenia rovnice s nulovou pravou stranou $x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$

- konštanty c_1, c_2 sa znova určia z počiatočných podmienok (a riešenie rovnice s počiatočnými podmienkami je opäť jediným riešením)

Eulerov recept

pre lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou

- rovnicu $a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 \ddot{x}(t) = b(t)$ (funkcie $a_i(t)$ sú tu konštantné funkcie) nazývame lineárnou diferenciálnou rovnicou s konštantnými koeficientami

- ak je ešte aj $b(t)$ konštantná funkcia, potom máme rovnicu, ktorá sa v čase nemení (v každom čase je to presne tá istá rovnica) a práve takéto rovnice očakávame pri opise systémov, ktoré sa chovajú podľa nemenného zákona

- na riešenie takýchto rovníc s $b(t) = 0$ existuje univerzálny recept:

riešenie hľadaj v tvare $e^{\alpha t}$

krátke opakovanie

základom receptu je toto: $\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$

pripomeňme si, že ide o deriváciu zloženej funkcie typu $x(t) = f(y(t))$ kde $f(y) = e^y$ a $y(t) = \alpha t$ a že pre takú deriváciu platí $\dot{x}(t) = f'(y(t))\,.\,\dot{y}(t)$

$f'(y) = \frac{d}{dy}e^y = e^y \qquad f'(y(t)) = e^{y(t)} = e^{\alpha t}$

$\dot{y}(t) = \alpha$

$\dot{x}(t) = \alpha e^{\alpha t}$

štvrtý príklad užitočnosti

rýchlosť (derivácia) zloženej funkcie

- zložená funkcia: funkcia premennej y, ktorá je funkciou premennej t
- $\frac{d}{dt}f(y(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(y(t+\Delta t)) - f(y(t))}{\Delta t}$
- teraz: $f(y(t+\Delta t)) = f(y(t) + \dot{y}(t)\,.\,\Delta t + \cdots))$
  $= f(y(t)) + f'(y(t))\,.\,(\dot{y}(t)\Delta t + \cdots) + \cdots$
- čiže: $\boxed{\frac{d}{dt}f(y(t)) = f'(y(t))\,.\,\dot{y}(t)}$ (čiarka = derivácia podľa y
  bodka = derivácia podľa t)

aká je rýchlosť, ak je pohyb $x(t) = e^t$?

$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{t+\Delta t} - e^t}{\Delta t}$

$e^{t+\Delta t} = e^t\,.\,e^{\Delta t} = e^t\,.\,\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\Delta t}{m}\right)^m = e^t\,.\,(1 + \Delta t + \overbrace{\cdots}^{\text{obsahuje } (\Delta t)^2 \text{ a vyššie mocniny}})$

$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^t\,.\,(1+\Delta t + \cdots) - e^t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (e^t + \underbrace{\cdots}_{\text{obsahuje } \Delta t \text{ a vyššie mocniny}}) = e^t$

$$\boxed{\frac{de^t}{dt} = e^t}$$

ako funguje Eulerov recept

- druhá derivácia: $\frac{d}{dt}\alpha e^{\alpha t} = \alpha \frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha^2 e^{\alpha t}$ (n-tá derivácia: $\frac{d^n}{dt^n} e^{\alpha t} = \alpha^n e^{\alpha t}$)
- po dosadení funkcie $e^{\alpha t}$ do lin. dif. rovnice s konšt. koef. a nulovou pravou stranou dostaneme $a_0 e^{\alpha t} + a_1 \alpha e^{\alpha t} + a_2 \alpha^2 e^{\alpha t} = 0$ (rovnica 2. rádu ako príklad)
- $\left(a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2\right) e^{\alpha t} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 = 0$
- vyriešime (kvadratickú) rovnicu, dostaneme (dve) riešenia α_1, α_2
- princíp superpozície nám dá všeobecné riešenie: $\boxed{x(t) = c_1 \,.\, e^{\alpha_1 t} + c_2 \,.\, e^{\alpha_2 t}}$

príklad: pomalý pohyb s odporom prostredia

- pri malých rýchlostiach je odpor prostredia úmerný rýchlosti $F = -\gamma v$
  (čo je iné ako pri "bežných" rýchlostiach, kde je úmerný kvadrátu rýchlosti)
  prečo je to tak, si povieme v nasledujúcej prednáške

- Newtonova pohybová rovnica má v tomto prípade tvar $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = 0$

- je to lineárna diferenciálna rovnica s konšt. koef. a nulovou pravou stranou, takže riešenie budeme hľadať v tvare $x(t) = e^{\alpha t}$

- dosadíme, dostaneme: $m\alpha^2 e^{\alpha t} + \gamma\alpha e^{\alpha t} = 0$ a teda $m\alpha^2 + \gamma\alpha = 0$

- dve riešenia kvadratickej rovnice $\alpha\left(m\alpha + \gamma\right) = 0$: $\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = -\frac{\gamma}{m}$

dokončenie príkladu

- všeobecné riešenie rovnice s nulovou pravou: $x(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$
- počiatočné podmienky: $x(0) = c_1 + c_2 = x_0$ $\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{m} c_2 = v_0$
- hodnoty konštánt (z počiatočných podmienok): $c_2 = -\frac{mv_0}{\gamma}$ $c_1 = x_0 + \frac{mv_0}{\gamma}$
- jednoznačné riešenie rovnice aj s poč. podm: $x(t) = x_0 + \frac{mv_0}{\gamma} - \frac{mv_0}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}t}$
- odporúčaná nepovinná domáca úloha: pomocou pythonu alebo nejakého iného programu nakreslite pre rôzne hodnoty parametrov m, γ, x_0, v_0 grafy závislostí polohy a rýchlosti od času

príklad: voľný pád s odporom prostredia

- budeme uvažovať iba začiatok voľného pádu, keď sú rýchlosti dosť malé na to, aby platilo $F = -\gamma v$ (inak by sme dostali nelineárnu rovnicu)
- Newtonova pohybová rovnica má v tomto prípade tvar $m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = mg$
- lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami a s nenulovou pravou stranou, riešenie je súčtom partikulárneho riešenia a všeobecného riešenia rovnice s nulovou pravou stranou (to poznáme z minulého príkladu)

$$x(t) = x_p(t) + c_1 + c_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

- skúsme uhádnuť jedno partikulárne riešenie našej rovnice

dokončenie príkladu

- zjavne dobrý nápad je lineárna funkcia $x(t) = ct$ pre $\gamma c = mg$ čiže $x_p(t) = \frac{mg}{\gamma}t$
- všeobecné riešenie: $x(t) = \frac{mg}{\gamma}t + c_1 + c_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$
- počiatočné podmienky: $x(0) = c_1 + c_2 = x_0$ $\dot{x}(0) = \frac{mg}{\gamma} - \frac{\gamma}{m}c_2 = v_0$
- hodnoty konštánt: $c_2 = \frac{m}{\gamma}\left(\frac{mg}{\gamma} - v_0\right)$ $c_1 = x_0 - \frac{m}{\gamma}\left(\frac{mg}{\gamma} - v_0\right)$
- jednoznačné riešenie: $x(t) = \frac{mg}{\gamma}t + x_0 + \frac{m}{\gamma}\left(\frac{mg}{\gamma} - v_0\right)\left(e^{-\frac{\gamma}{m}t} - 1\right)$
- odporúčaná nepovinná domáca úloha: to isté, čo v predchádzajúcom príklade

reklama na záver

v nasledujúcej prednáške preskúmame pomocou techník, ktoré sme sa práve naučili, jeden z úplne najdôležitejších fyzikálnych systémov: lineárny harmonický oscilátor