1. Vlny v jednom rozmere (opakovanie)

Elektromagnetické vlny sú trojrozmerné v dvoch zmysloch. Jednak sú to vlny v trojrozmernom priestore a jednak veličiny "ktoré sa vlnia" (polia $\vec{E}$, $\vec{B}$ resp. vektorový potenciál $\vec{A}$) sú vektorové veličiny. Napriek tejto dvojakej trojrozmernosti majú elmag vlny veľa vlastností spoločných so svojimi jednorozmernými sestrami. Na druhej strane, napriek tejto príbuznosti prináša dvojaká trojrozmernosť veľa špecifických noviniek. Aby sme si jasne uvedomili, čo sú všeobecné vlastnosti všetkých typov vĺn a čo nové so sebou prinášajú tri rozmery, zopakujeme si stručne známe veci z jednorozmerného prípadu t.j. z kmitov struny. Potom prejdeme ku skalárnym vlnám v trojrozmernom prípade a nakoniec k vektorovým vlnám v trojrozmernom prípade.

Toto opakovanie jednorozmerného prípadu možno samozrejme preskočiť. Jednoduchým testom či je takéto preskočenie vhodné alebo nie, je nasledovná otázka: *Aké vlny sa "vlnia" na gitarovej strune – postupné alebo stojaté?* Kým budete čítať ďalej, naozaj sa zamyslite na touto otázkou a sformulujte (stačí sám pre seba) jasnú a jednoznačnú odpoveď.

Nie, nie, nie – nemáte čítať ďalej, kým nemáte sformulovanú jasnú odpoveď (či už s rozmýšľaním alebo bez neho). Takže aká je vaša odpoveď?

No dobre, tak poďme čítať ďalej. Bežná odpoveď *"stojaté!"* nie je síce nesprávna, ale rozhodne to nie je tá najlepšia odpoveď. Oveľa správnejšiou odpoveďou je mierny smiech, asi taký, aký by v nás vyvolala otázka či platí $4 = 2 + 2$ alebo $4 = 3 + 1$? Samozrejme, že platia obe tieto rovnosti, rovnako ako platí, že na gitarovej strune sa "vlnia" stojaté aj postupné vlny.

Stojaté a postupné vlny nie sú dve rôzne veci, ale skôr dva rôzne jazyky používané na opis tých istých vecí. Každú stojatú vlnu možno napísať ako superpozíciu postupných vĺn a naopak. Ak vám toto nie je celkom jasné, radšej nič nepreskakujte.

Takže poďme na tie vlny v jednom rozmere, čo sú napríklad vlny na strune. Kmity (pozdĺžne aj priečne) struny, na ktorú nepôsobia nijaké vonkajšie sily, sú opísané vlnovou rovnicou (pripomeňme, že táto rovnica je dôsledkom Newtonovej pohybovej rovnice a Hookovho zákona)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,t) = 0$$

kde u predstavuje výchylku struny (či už pozdĺžnu alebo priečnu) v mieste x a v čase t. Na riešenie tejto rovnice sa používajú dva základné prístupy, ktorým budeme hovoriť d'Alambertov a Fourierov. Prvý z nich vedie prirodzene k pojmu postupných vĺn, druhý k pojmu stojatých vĺn. V prípade elmag vĺn sa ukáže byť omnoho vhodnejším Fourierov prístup, takže opakovanie d'Alambertovho prístupu je tu len kvôli istej úplnosti a môže sa preskočiť.

d'Alambertov prístup je založený na zistení, že funkcie typu $u(x \pm v \cdot t)$ sú riešeniami vlnovej rovnice na priamke t.j. neohraničenej strune. Tieto riešenia sa nazývajú postupné vlny (pozri poznámku na str. **??**). Avšak nie každé riešenie vlnovej rovnice na priamke je postupnou vlnou. Napríklad súčet dvoch postupných vĺn postupujúcich opačným smerom je riešením vlnovej rovnice (princíp superpozície), ale nie je postupnou vlnou. Význam postupných vĺn nespočíva v tom, že by to boli jediné riešenia vlnovej rovnice, ale v tom, že všetky riešenia vlnovej rovnice sa dajú písať ako superpozície postupných vĺn. Vyjadrenie riešenia vlnovej rovnice s danými počiatočnými podmienkami cez superpozíciu postupných vĺn sa dá pomerne ľahko uhádnuť. (Uhádnutie a jeho jednoduché preverenie je základnou technikou d'Alambertovho prístupu.)

Ak je počiatočná výchylka zadaná ľubovoľnou funkciou $f(x)$ a počiatočná rýchlosť zmeny výchylky $\dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$ je nulová, t.j. ak

$$u(x,0) = f(x).$$
$$\dot{u}(x,0) = 0$$

potom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\ (\ f(x + v \cdot t) + f(x - v \cdot t)\ )$$

počiatočná výchylka sa rozdelí napoly a každá polovica sa rozbehne svojim smerom. Z princípu superpozície je jasné, že $u(x,t)$ je riešením vlnovej rovnice a priamym dosadením sa dá okamžite presvedčiť, že spĺňa uvedené počiatočné podmienky.

Ak je počiatočná výchylka nulová a počiatočná rýchlosť zmeny výchylky je zadaná ľubovoľnou funkciou $h(x)$, t.j. ak

$$u(x,0) = 0$$
$$\dot{u}(x,0) = h(x)$$

potom

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\ (\ H(x + v \cdot t) - H(x - v \cdot t)\ ) \qquad \text{kde} \qquad H(x) = \frac{1}{v}\int h(x)\ dx$$

("primitívna funkcia k rýchlosti zmeny počiatočnej výchylky sa rozdelí napoly, a každá polovica sa rozbehne so svojim znamienkom svojim smerom"). Znova je z princípu superpozície jasné, že $u(x,t)$ je riešením vlnovej rovnice a znova sa priamym dosadením dá okamžite presvedčiť, že spĺňa uvedené počiatočné podmienky.

Princíp superpozície a priame dosadenie nám dá riešenie aj vo všeobecnom prípade počiatočných podmienok

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\dot{u}(x,0) = h(x)$$

a síce

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\ (\ f(x + v \cdot t) + f(x - v \cdot t) + H(x + v \cdot t) - H(x - v \cdot t)\ )$$

A tým je úloha na priamke raz a navždy úplne vyriešená v tvare superpozície štyroch postupných vĺn. (Čo ale neznamená, že neexistuje aj iný užitočný zápis toho riešenia, ktorý má podstatne iný tvar.)

Z riešenia vlnovej rovnice na priamke sa dá jednoduchými trikmi nájsť (uhádnuť) riešenie rovnice na polpriamke s pevným alebo voľným koncom. Pevnému koncu v bode $x = 0$ zodpovedá okrajová podmienka $u(0,t) = 0$, voľnému koncu podmienka $u'(0,t) \equiv \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$ (voľný koniec totiž zodpovedá nulovej pružnej sile a tá je daná podľa Hookovho zákona deriváciou výchylky podľa x). Trik spočíva vo vhodnom rozšírení problému z polpriamky na celú priamku. Nech sú napríklad na polpriamke $x \geq 0$ zadané počiatočné podmienky

$$u(x,0) = \bar{f}(x)$$
$$\dot{u}(x,0) = 0$$

Doplňme tieto počiatočné podmienky na celú priamku tak, aby výsledná funkcia bola nepárna pre pevný a párna pre voľný koniec t.j. definujme funkciu $f(x)$ takto

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{f}(x) && \text{pre } x \geq 0 \\ &= -\bar{f}(-x) && \text{pre } x < 0 \end{aligned} \quad \text{pevný koniec}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{f}(x) && \text{pre } x \geq 0 \\ &= \bar{f}(-x) && \text{pre } x < 0 \end{aligned} \quad \text{voľný koniec}$$

Riešenie vlnovej rovnice na priamke s počiatočnými podmienkami danými funkciou $f(x)$ a nulovou počiatočnou rýchlosťou už poznáme a toto riešenie je riešením rovnice aj na polpriamke pričom na nej spĺňa počiatočné podmienky. Ostáva teda len zistiť, či spĺňa aj okrajovú podmienku a to spĺňa, ako sa znovu ľahko presvedčíme priamym dosadením. Iná možnosť je nerobiť mechanické dosadenie, ale predstaviť si, čo dajú v bode $x = 0$ dve oproti sebe bežiace polovice párnej resp. nepárnej počiatočnej podmienky. Takéto predstavenie si riešenia umožní uvidieť, že doľava bežiaca polovica, ktorá v bode $x = 0$ "opúšťa" polpriamku, sa v tomto bode stretá s doprava bežiacou polovicou, ktorá na polpriamku "prichádza". Obe polovice majú pritom v tomto bode presne rovnakú alebo presne opačnú hodnotu, takže z hľadiska polpriamky to vyzerá tak, ako keby sa doľava idúca vlna odrážala od pevného resp. voľného konca s opačnou resp. rovnakou fázou.

Nech sú teraz na polpriamke $x \geq 0$ zadané počiatočné podmienky

$$u(x,0) = 0$$
$$\dot{u}(x,0) = \bar{h}(x)$$

Znovu doplníme tieto počiatočné podmienky na celú priamku tak, aby výsledná funkcia bola nepárna pre pevný a párna pre voľný koniec.

$$\begin{aligned} h(x) &= \bar{h}(x) && \text{pre } x \geq 0 \\ &= -\bar{h}(-x) && \text{pre } x < 0 \end{aligned} \quad \text{pevný koniec}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \bar{h}(x) && \text{pre } x \geq 0 \\ &= \bar{h}(-x) && \text{pre } x < 0 \end{aligned} \quad \text{voľný koniec}$$

Riešenie vlnovej rovnice na priamke je znova riešením rovnice aj na polpriamke a znovu sa možno ľahko presvedčiť, že na nej spĺňa počiatočné podmienky aj okrajovú podmienku. Riešenie rovnice s všeobecnými počiatočnými podmienkami $u(x,0) = \bar{f}(x)$, $\dot{u}(x,0) = \bar{h}(x)$ je dané súčtom riešení dvoch predchádzajúcich prípadov.

Analogickými trikmi sa dá z postupných vĺn poskladať riešenie vlnovej rovnice na úsečke s pevnými alebo voľnými koncami. Tentoraz treba rozšíriť počiatočné podmienky z úsečky na vhodnú periodickú funkciu na priamke. Ak sú na úsečke $0 \le x \le l$ zadané počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \bar{f}(x) \\ \dot{u}(x,0) &= \bar{h}(x) \end{aligned}$$

definujeme funkcie $f(x)$, $h(x)$ periodické s periódou $2l$ nasledovne

$$\left.\begin{array}{rcll} f(x) & = & \bar{f}(x) & \text{pre } 0 \le x \le l \\ & = & -\bar{f}(-x) & \text{pre } -l \le x < 0 \\ h(x) & = & \bar{h}(x) & \text{pre } 0 \le x \le l \\ & = & -\bar{h}(-x) & \text{pre } -l \le x < 0 \end{array}\right. \quad \text{pevné konce}$$

$$\left.\begin{array}{rcll} f(x) & = & \bar{f}(x) & \text{pre } 0 \le x \le l \\ & = & \bar{f}(-x) & \text{pre } -l \le x < 0 \\ h(x) & = & \bar{h}(x) & \text{pre } 0 \le x \le l \\ & & \bar{h}(-x) & \text{pre } -l \le x < 0 \end{array}\right. \quad \text{voľné konce}$$

Znova sa priamym dosadením alebo správnym predstavením si riešenia presvedčíme, že riešenia na priamke s počiatočnými podmienkami $f(x)$, $h(x)$ sú riešeniami na úsečke s danými počiatočnými a okrajovými podmienkami a znova ich môžeme interpretovať ako odraz s opačnou fázou na pevnom a rovnakou na voľnom konci.

Výhodou d'Alambertovho prístupu je jednoduché vyjadrenie riešenia pomocou počiatočných podmienok a jasné nahliadnutie niektorých všeobecne známych vlastností vĺn (napríklad odrazu vĺn na pevných a voľných koncoch alebo toho, že postupné vlny tvoria vhodný jazyk na opis všetkých vĺn, t.j. všetkých riešení vlnovej rovnice). Nevýhodou je, že tento postup sa nedá dobre zovšeobecniť na viacrozmerné prípady. Vo viacerých rozmeroch sú v podstate dva problémy: jednak počiatočnú podmienku by tu bolo treba rozdeliť na nekonečne veľa častí a poslať ich nekonečne veľa smermi (ale keď rozdelíme konečnú počiatočnú podmienku na nekonečne veľa častí, budú tieto časti nulové) a jednak vôbec nie je jasné, ako dopĺňať (v duchu triku s úsečkou v jednom rozmere) počiatočnú podmienku v nejakej nepravidelnej ohraničenej oblasti na celý priestor. To neznamená, že d'Alambertov prístup nehrá vo viacerých rozmeroch nijakú úlohu (d'Alambertovo riešenie na polpriamke sa dá využiť pre riadiálnu premennú v sférických súradniciach), ale v porovnaní s Fourierovým prístupom hrá d'Alambertov prístup vo viacerých rozmeroch v podstate zanedbateľnú úlohu.

Fourierov prístup nie je nič iné ako metóda separácie premenných známa z druhej kapitoly (časť 2.2) a spočíva v hľadaní riešenia v špeciálnom tvare a to v tvare súčinu dvoch funkcií, z ktorých jedna závisí len od x a druhá len od t. Nie každé riešenie vlnovej rovnice sa však dá napísať v takomto tvare a preto to, čo takto nájdeme budú len určité špeciálne riešenia. Tieto špeciálne riešenia sú ovšem významné tým, že sa z nich dá poskladať (v tvare superpozície) všeobecné riešenie.

Dosadením funkcie $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ do vlnovej rovnice dostaneme

$$X^{''}(x) \cdot T(t) - \frac{1}{v^2} \cdot X(x) \cdot \ddot{T}(t) = 0$$

a predelením tejto rovnice funkciou $u = X \cdot T$ dostaneme

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0$$

ľavá strana je súčtom dvoch členov, z ktorých každý závisí len od jednej premennej. Ak teraz fixujeme jednu z nich t.j. ak položíme napr. $t = t_{\text{fix}}$, stane sa člen závislý len od tejto premennej konštantou (nazvime ju α) a z celej rovnice potom vyplýva, že tejto konštante musí byť rovný aj druhý člen a to pre ľubovoľnú hodnotu druhej premennej t.j. že

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \alpha \equiv \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t_{\text{fix}})}{T(t_{\text{fix}})}$$

Ak naopak fixujeme premennú x, dostaneme analogicky

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X^{''}(x_{\text{fix}})}{X(x_{\text{fix}})} = \alpha$$

Pre funkcie $X(x)$ a $T(t)$ tak dostávame rovnice

$$X^{''} = \alpha \cdot X$$
$$\ddot{T} = \alpha \cdot v^2 \cdot T$$

Pôvodná parciálna diferenciálna rovnica sa nám takto rozdelila (separovala) na dve obyčajné diferenciálne rovnice, ktorých riešenie je už pomerne jednoduché.

Ak uvažujeme riešenie vlnovej rovnice na úsečke s pevnými resp. voľnými koncami, potom sa okrajové podmienky $u(0,t) = u(l,t) = 0$ (pevné konce) resp. $u'(0,t) = u'(l,t) = 0$ (voľné konce) prejavia na funkcii $X(x)$. Ak totiž funkcia $T(t)$ nie je identicky rovná nule, potom z okrajových podmienok vyplýva

$$X(0) = X(l) = 0 \qquad \text{pevné konce}$$
$$X'(0) = X'(l) = 0 \qquad \text{voľné konce}$$

Ak je funkcia T(t) identicky rovná nule, potom je identicky rovné nule celé riešenie $u(x,t)$. Toto je skutočne riešením našej úlohy pre triviálny prípad nulových počiatočných podmienok a len pre tento prípad. Aby sme sa nemuseli k tomuto triviálnemu prípadu stále vracať (v poznámkach podobných tejto), explicitne ho vylúčime z našich ďalších úvah, vedomí si toho, že toto triviálne riešenie existuje.

V prípade riešenia vlnovej rovnice na priamke sa nepožaduje splnenie nijakých okrajových podmienok t.j. nijakých podmienok pre $u(x,t)$ v limite $x \to \pm\infty$, požaduje sa zatiaľ len ohraničenosť riešenia na celej priamke. Ohraničenosť riešenia je veľmi prirodzená požiadavka, pretože neohraničenosť znamená nekonečne veľké výchylky a tie nemajú dobrý fyzikálny zmysel, keďže samotná vlnová rovnica je odvodená z predpokladu malých výchyliek (len pre ne totiž platí Hookov zákon). Neohraničené riešenia teda považujeme za nefyzikálne a vždy (nielen na priamke) hľadáme len ohraničené riešenia vlnovej rovnice. Ohraničenosť funkcie $u(x,t)$ sa prejaví na funkciách $X(x)$ a $T(t)$. Z ohraničenosti $u(x,t)$ vyplýva pre $T(t)$ nie všade rovné nule ohraničenosť $X(x)$ a pre $X(x)$ nie všade rovné nule ohraničenosť $T(t)$.

Riešeniami rovnice pre funkciu $X(x)$ sú funkcie $e^{\sqrt{\alpha}\cdot x}$, $e^{-\sqrt{\alpha}\cdot x}$ pre $\alpha > 0$, funkcie $\sin\sqrt{-\alpha}\cdot x$, $\cos\sqrt{-\alpha}\cdot x$ pre $\alpha < 0$ a funkcia $a\cdot x+b$ pre $\alpha = 0$. Okrajové podmienky v prípade úsečky a podmienka ohraničenosti v prípade priamky vylučujú spomedzi riešení exponenty a nekonštantnú lineárnu funkciu (pre voľné konce a pre priamku prežije okrajové podmienky lineárna funkcia v podobe konštantnej funkcie $X = b$). Úloha má teda riešenie len pre $\alpha \leq 0$. Pre úsečku navyše okrajová podmienka v bode $x = 0$ vylučuje spomedzi riešení cosínus v prípade pevného a sínus v prípade voľného konca. Okrajová podmienka v bode $x = l$ okrem toho určuje, pre aké α má vôbec úloha riešenie. Aby mohla byť táto úloha splnená, musí byť $\sqrt{-\alpha}$ rovná celočíselnému násobku $\frac{\pi}{l}$. Celkove teda máme

$$X(x) = \sin\,(k\cdot x) \quad \text{kde} \quad k = \frac{n\pi}{l} \quad \text{pevné konce}$$

$$X(x) = \cos\,(k\cdot x) \quad \text{kde} \quad k = \frac{n\pi}{l} \quad \text{voľné konce}$$

$$\begin{aligned} &X(x) = \sin\,(k\cdot x) \\ &X(x) = \cos\,(k\cdot x) \quad \text{kde } k \text{ je ľubovoľné} \quad \text{žiadne konce (priamka)} \end{aligned}$$

a v prípade voľných koncov je riešením úlohy ešte aj konštantná funkcia $X(x) = b$

Riešeniami rovnice pre funkciu $T(t)$ sú pre $\alpha < 0$ funkcie

$$T(t) = \sin\,(\omega\cdot t) \qquad \text{a} \qquad T(t) = \cos\,(\omega\cdot t) \qquad \text{kde} \qquad \omega = \sqrt{-\alpha\cdot v^2} = k\cdot v$$

Pre $\alpha = 0$ je riešením lineárna funkcia, ktorá ak nie je konštantná, tak vedie na s časom neohraničene rastúce resp. klesajúce, t.j. nefyzikálne riešenie $u(x,t)$. Jediným fyzikálnym riešením pre $\alpha = 0$ je teda súčin dvoch konštantných funkcií, čiže funkcia $u(x,t) = c$.

Riešeniami vlnovej rovnice v hľadanom tvare sú teda funkcie

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sin\,(k\cdot x)\ \sin\,(\omega\cdot t) \qquad & u(x,t) &= \sin\,(k\cdot x)\ \cos\,(\omega\cdot t) \\ u(x,t) &= \cos\,(k\cdot x)\ \sin\,(\omega\cdot t) \qquad & u(x,t) &= \cos\,(k\cdot x)\ \cos\,(\omega\cdot t) \end{aligned}$$

ktorým sa hovorí stojaté vlny, názov pochádza z toho, že celkový profil vlny sa nehýbe, len sa s časom periodicky zväšuje a zmenšuje. (V prípade voľných koncov je riešením úlohy ešte aj konštantná funkcia $u(x,t) = c$.)

Nie každé riešenie vlnovej rovnice je ovšem stojatou vlnou. Superpozícia stojatých vĺn je riešením vlnovej rovnice (princíp superpozície), ale nie je stojatou vlnou. Význam stojatých vĺn nespočíva v tom, že by to boli jediné riešenia vlnovej rovnice, ale v tom, že všetky riešenia vlnovej rovnice sa dajú písať ako superpozície stojatých vĺn. Ukážeme, že je tomu naozaj tak.

Superpozícia všetkých možných stojatých vĺn nám dáva

pevné konce:

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\; \sin\,(k_n\cdot x)\; \cos\,(\omega_n\cdot t) \;+\; c_n'\; \sin\,(k_n\cdot x)\; \sin\,(\omega_n\cdot t)$$

voľné konce:

$$u(x,t) \;=\; c \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\; \cos\,(k_n\cdot x)\; \cos\,(\omega_n\cdot t) \;+\; c_n'\; \cos\,(k_n\cdot x)\; \sin\,(\omega_n\cdot t)$$

žiadne konce (priamka):

$$u(x,t) \;=\; \int_0^{\infty} c(k)\; \sin\,(k\cdot x)\; \cos\,(\omega\cdot t) \;+\; c'(k)\; \sin\,(k\cdot x)\; \sin\,(\omega\cdot t) \;+$$
$$+\; \bar{c}(k)\; \cos\,(k\cdot x)\; \cos\,(\omega\cdot t) \;+\; \bar{c}'(k)\; \cos\,(k\cdot x)\; \sin\,(\omega\cdot t)\quad dk$$

kde $k_n = \frac{n\pi}{l}$, $\omega_n = \frac{n\pi v}{l}$ a $\omega(k) = k\cdot v$ (pričom argument k sa v $\omega(k)$ často kvôli väčšej prehľadnosti zápisov vynecháva).

Po dosadení počiatočných podmienok do týchto superpozícií dostaneme

pevné konce:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\; \sin\,(k_n\cdot x) \qquad\qquad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'\;\; \omega_n\; \sin\,(k_n\cdot x)$$

voľné konce:

$$f(x) \;=\; c \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\; \cos\,(k_n\cdot x) \qquad\qquad h(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n'\; \omega_n\; \cos\,(k_n\cdot x)$$

žiadne konce (priamka):

$$f(x) \;=\; \int_0^{\infty} c(k)\; \sin\,(k\cdot x) \;+\; \bar{c}(k)\; \cos\,(k\cdot x)\quad dk$$
$$h(x) \;=\; \int_0^{\infty} c'(k)\; \omega(k)\; \sin\,(k\cdot x) \;+\; \bar{c}'(k)\; \omega(k)\; \cos\,(k\cdot x)\quad dk$$

Uvedené rady a integrály však nie sú nič iné ako Fourierove rady resp. Fourierove integrály pre funkcie $f(x)$ a $h(x)$. A keďže každá slušná funkcia sa dá rozvinúť do Fourierovho radu resp. integrálu, znamená to, že superpozíciou stojatých vĺn sme schopní splniť ľubovoľné slušné počiatočné podmienky (slušnosť funkcie je tu daná predpokladmi vety o Fourierovom rade resp. integrále).

Koeficienty v našich superpozíciách stojatých vĺn sú pritom dané známymi vzťahmi

pevné konce:

$$c_n = \frac{2}{l}\; \int_0^l f(x)\; \sin(k_n\cdot x)\; dx \qquad\qquad c_n' = \frac{1}{\omega_n}\; \frac{2}{l}\; \int_0^l h(x)\; \sin(k_n\cdot x)\; dx$$

voľné konce (pri označení $c = \frac{c_0}{2}$):

$$c_n = \frac{2}{l}\; \int_0^l f(x)\; \cos(k_n\cdot x)\; dx \qquad\qquad c_n' = \frac{1}{\omega_n}\; \frac{2}{l}\; \int_0^l h(x)\; \cos(k_n\cdot x)\; dx$$

žiadne konce (priamka):

$$c(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \sin(k \cdot x)\ dx$$
$$\bar{c}(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos(k \cdot x)\ dx$$
$$c'(k) = \frac{1}{\omega(k)}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\ \sin(k \cdot x)\ dx$$
$$\bar{c}'(k) = \frac{1}{\omega(k)}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\ \cos(k \cdot x)\ dx$$

V prípade riešenia na priamke je oveľa prehľadnejší zápis pomocou komplexnej exponenty. Ak zapíšeme Fourierov integrál vo vyjadrení počiatočných podmienok v komplexnom tvare, dostaneme

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\ e^{ikx} \cos(\omega t) + C'(k)\ e^{ikx} \sin(\omega t)\ dk$$

čo v dôsledku $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ a $\sin(\omega t) = -\frac{i}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ prejde na

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k)\ e^{i(kx-\omega t)} + \beta(k)\ e^{i(kx+\omega t)}\ dk$$

kde $\alpha(k) = \frac{1}{2}(C(k) + iC'(k))$, $\beta(k) = \frac{1}{2}(C(k) - iC'(k))$. Explicitné vyjadrenie koeficientov $\alpha(k)$ a $\beta(k)$ je (pozri nasledovnú matematickú poznámku)

$$\alpha(k) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) + \frac{i}{\omega(k)} h(x) \right)\ e^{-ikx}\ dx$$
$$\beta(k) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - \frac{i}{\omega(k)} h(x) \right)\ e^{-ikx}\ dx$$

Superpozície stojatých vĺn[1] s uvedenými koeficientami sú riešeniami vlnovej rovnice s danými počiatočnými podmienkami. Fourierov postup nás teda doviedol k riešeniu vlnovej rovnice s danými okrajovými podmienkami pre ľubovoľné (slušné) počiatočné podmienky. Nevýhodou Fourierovho riešenia je, že riešenie je v tvare nekonečného radu, ktorý nevieme vždy explicitne sčítať (takže sme často odkázaní na to, že sčítame len niekoľko prvých členov tohto radu a dostaneme tak určité približné riešenie). Ďalšou nevýhodou je, že koeficienty tohto nekonečného radu sú dané v tvare integrálov, ktoré môžu byť značne komplikované. Výhodou (z hľadiska elektrodynamiky rozhodujúcou) je možnosť pomerne jednoduchého a prirodzeného zovšeobecnenia na viacrozmerné prípady.

[1]Stojaté vlny majú podobne ako postupné vlny tú vlastnosť, že sa z nich dá poskladať ľubovoľné riešenie vlnovej rovnice. Možno nebude na škodu v tejto súvislosti explicitne zdôrazniť, že stojaté a postupné vlny nie sú dve rôzne veci, ale dva rôzne jazyky vhodné na opis tých istých vecí. Prekladový slovník medzi týmito dvomi jazykmi, t.j. vyjadrenie stojatých vĺn cez postupné a naopak, poskytujú súčtové vzorce pre sínus a cosínus, čiže jedným smerom napríklad $\sin(kx)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}(\cos(kx - \omega\ t) - \cos(kx + \omega t))$ a druhým smerom napríklad $\cos(kx - \omega t) = \cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)$ V prípade zápisu cez komplexné exponenty je prekladový slovník medzi stojatými a postupnými vlnami ešte jednoduchší: $e^{i(kx+\omega t)} = e^{ikx}e^{i\omega t}$. Preto má vyjadrenie získané ako superpozícia stojatých vĺn zjavne tvar superpozície postupných vĺn.

Matematická poznámka – koeficienty Fourierovho radu a integrálu

Fourierov prístup redukuje riešenie vlnovej rovnice na výpočet koeficientov Fourierovho radu resp. integrálu. Pre úplnosť si pripomeňme, ako sa tieto koeficienty počítajú.

Fourierov rad pre funkciu $f(x)$ definovanú na intervale $\langle 0, l\rangle$ dostaneme doplnením na periodickú funkciu s periódou l

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\sin\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)\,dx \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\cos\left(\frac{2\pi nx}{l}\right)\,dx$$

doplnením na nepárnu periodickú funkciu s periódou $2l$ Fourierov rad cez sínusy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\,dx$$

a doplnením na párnu periodickú funkciu s periódou $2l$ Fourierov rad cez cosínusy

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\,dx$$

Fourierov integrál dostaneme z Fourierovho radu pre funkciu definovanú na $\langle -l, l\rangle$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) + b_n \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\,dx \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\,dx$$

v limite $l \to \infty$. Najjasnejšie to vidno ak jednotlivé členy radu vynásobíme šikovne zapísanou jednotkou v tvare $1 = n - (n-1) = \delta n = \frac{l}{\pi}\,\delta\frac{n\pi}{l}$ a označíme $c_n = \frac{l}{\pi}\,a_n$, $\bar{c}_n = \frac{l}{\pi}\,b_n$, čím dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{\pi n}{l}x)\,\delta\frac{n\pi}{l} + \bar{c}_n \cos(\frac{\pi n}{l}x)\,\delta\frac{n\pi}{l} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c(k_n)\sin(k_n x)\,\delta k_n + \bar{c}(k_n)\cos(k_n x)\,\delta k_n \end{aligned}$$

kde sme ďalej označili $k_n = \frac{\pi n}{l}$, $c_n = c(k_n)$, $\bar{c}_n = \bar{c}(k_n)$. Ak by uvedená suma nešla do nekonečna, ale len do nejakého konečného N, bol by to N-tý integrálny súčet funkcie $c(k)\cos(k\cdot x) + \bar{c}(k)\sin(k\cdot x)$. Ak suma ide do nekonečna a ak súčasne ide δk_n do nuly (čo pre $l \to \infty$ ide) potom je táto suma (pokiaľ existuje) rovná určitému integrálu z danej funkcie t.j.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \int_0^{\infty} c(k)\sin(kx) + \bar{c}(k)\cos(kx)\;dk$$

kde

$$c(k) = \lim_{l\to\infty}\frac{l}{\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad \bar{c}(k) = \lim_{l\to\infty}\frac{l}{\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(kx)\,dx$$

Uvedené limity nemusia existovať pre ľubovoľnú funkciu $f(x)$, ale pokiaľ je táto funkcia absolútne integrovateľná, t.j. pokiaľ existuje konečný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$, potom tieto limity existujú. Fourierov integrál sa preto definuje len pre absolútne integrovateľné funkcie. Pre také funkcie je $a_0 = \lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 0$, takže celkove

$$f(x) = \int_0^\infty c(k)\sin(kx) + \bar{c}(k)\cos(kx)\ dk$$

kde

$$c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)\, dx \qquad \bar{c}(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)\, dx$$

<u>Fourierov integrál vyjadrený cez imaginárne exponenty</u> získame, ak vo vyjadrení cez sínusy a kosínusy použijeme $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx})$ a $\sin kx = -\frac{i}{2}(e^{ikx}-e^{-ikx})$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \ -c(k)\ \frac{i}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx})\ +\ \bar{c}(k)\ \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})\ dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\ C(k)\ e^{ikx}\, dk \end{aligned}$$

kde $C(k) = \frac{1}{2}\left(\bar{c}(k) - ic(k)\right)$ pre $k \geq 0$ a $C(k) = \frac{1}{2}\left(\bar{c}(-k) + ic(-k)\right)$ pre $k < 0$. Všimnime si, že $C(-k) = C^*(k)$. Táto podmienka súvisí s reálnosťou funkcie $f(x)$ (ktorú sme doteraz nezdôrazňovali, ale celý čas sme ju implicitne predpokladali). Vyjadrenie $C(k)$ cez imaginárnu exponentu získame dosadením vyjadrení $c(k)$ a $\bar{c}(k)$ cez sínusy a cosínusy:

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos(kx) - i\, f(x)\ \sin(kx)\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \end{aligned}$$

<u>Fourierova transformácia</u> je užitočné (ako ešte uvidíme) zobrazenie, ktoré priradí funkcii $f(x)$ funkciu $C(k)$, ktorú v tejto súvislosti označujeme symbolom $\tilde{f}(k)$ a voláme ju Fourierovým obrazom funkcie $f(x)$. Inverzné zobrazenie, ktoré priradí funkcii $\tilde{f}(k)$ funkciu $f(x)$ voláme spätnou Fourierovou transformáciou. Fourierova transformácia (tam a späť) je teda definovaná ako

$$f(x) \leftrightarrow \tilde{f}(k)$$

kde[2]

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\ e^{ikx}\, dk \\ \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \end{aligned}$$

[2]Často sa používa definícia, v ktorej sa faktor $\frac{1}{2\pi}$ rozdelí medzi funkciou a jej Fourier obraz

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\ e^{ikx}\, dk \qquad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Niekedy sú v definícii vymenené znamienka v exponentách. Okrem toho sa pomerne často nepíše vlnovka nad $f(k)$ a medzi funkciou a jej Fourier obrazom sa rozlišuje na základe toho, či je premennou x alebo k.

Príklady

1. d'Alambertovo riešenie
(Elementárny príklad, nevyžadujúci nič viac než bezduché dosadenie do vzorca.)
a) Počiatočné podmienky pre kmity nekonečnej struny sú $u(x,0) = \exp\left(-x^2/a^2\right)$, $\dot{u}(x,0) = \frac{v}{a}\left(1 + x^2/a^2\right)^{-1}$. Nájdite $u(a, 3a/v)$
b) Počiatočné podmienky pre kmity polpriamky $x \geq 0$ sú $u(x,0) = 1 - \exp\left(-x^2/a^2\right)$, $\dot{u}(x,0) = \frac{v}{a}\left[1 - \left(1 + x^2/a^2\right)^{-1}\right]$. Nájdite $u(a, 3a/v)$ (a to ako v prípade pevného, tak aj voľného konca).
c) Počiatočné podmienky pre kmity konečnej struny $0 \leq x \leq 2a$ sú $u(x,0) = 1 - \exp\left(-x^2/a^2\right)$, $\dot{u}(x,0) = \frac{v}{a}\left[\frac{1}{5} - \left(1 + x^2/a^2\right)^{-1}\right]$. Nájdite $u(a, 3a/v)$ ak je koniec $x = 0$ pevný a koniec $x = 2a$ voľný.

2. Fourierovo riešenie
(Elementárny príklad, vyžadujúci počítanie jednoduchých integrálov.)
a) Nájdite Fourierovo riešenie vlnovej rovnice na úsečke $0 \leq x \leq L$ s počiatočnou podmienkou $u(x,0) = x(x-L)/L^2$, $\dot{u}(x,0) = v/L \sin \pi x/L$. (Konce buď oba pevné, alebo oba voľné).
b) Nájdite Fourierovo riešenie vlnovej rovnice na priamke s počiatočnou podmienkou $u(x,0) = \exp -x^2/a^2$, $\dot{u}(x,0) = 0$.

3. Časovo premenné okrajové podmienky
(Dôležité rozšírenie príkladov uvádzaných v texte.)
a) Separáciou premenných riešte vlnovú rovnicu na úsečke $0 \leq x \leq L$, s nulovými počiatočnými podmienkami a s okrajovými podmienkami $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = \sin \Omega t$. Ukážte, že pre $\Omega \to \omega_n = n\pi v/L$ dostávame riešenie s neobmedzene rastúcim koeficientom (rezonancia). (Návod: riešenie = superpozícia danej okrajovej úlohy s ľubovoľnými poč. podm. a úlohy s pevnými koncami a vhodnými poč. podm.)
b) To isté pre $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = g(t)$
c) To isté pre $u'(0,t) = \gamma(t)$, $u(L,t) = g(t)$

4. Dve spojené struny
(Dôležité rozšírenie príkladov uvádzaných v texte.)
a) Uvažujme dve spojené struny s rôznou rýchlosťou vĺn v každej z nich, t.j. uvažujme rovnicu $v_1^2\, u''(x,t) - \ddot{u}(x,t) = 0$ pre $0 \leq x \leq l$, a $v_2^2\, u''(x,t) - \ddot{u}(x,t) = 0$ pre $l \leq x \leq L$. Nájdite riešenie tejto úlohy pre pevné konce $u(0,t) = u(L,t) = 0$. (Návod: hladké zošitie riešení v jednotlivých strunách, pričom hladkosť znamená spojitosť funkcie aj derivácie.)
b) Ukážte, že v limitnom prípade $v_1 = v_2$ dostaneme riešenie pre strunu dĺžky L.
c) Ukážte, že v limitnom prípade $v_1 \gg v_2$ sú frekvencie kmitov systému zhodné s frekvenciami kmitov prvej struny (návod: rovnicu pre ω riešiť iteráciami, nahliadnuť že nultá je často dobrá, vďaka tomu že tangens je veľký len v úzkych intervaloch)[3]

[3] Z tohto príkladu plynú dve poučenia, po prvé frekvencie systému pozostávajúceho z dvoch podsystémov nemusia mať vôbec nič spoločné s frekvenciami týchto podsystémov, a po druhé za istých špeciálnych okolností môžu mať predsa len veľa spoločného. Typickým príkladom takýchto špeciálnych okolností sú strunové hudobné nástroje, kde frekvencie nástroja sú v podstate dané frekvenciami kmitov struny.