# Matematické modelovanie a počítačová animácia fyzikálnych procesov Štátnicová otázka S5 – Dynamika tuhých telies, definícia problému, rovnice pohybu (4 ODE), rýchlosť, zrýchlenie, uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie, matica hybnosti (matica inercie)

# Filip Pavlove a Jozef Kubík

# 30. decembra 2019

1. Tuhé telesá

Tuhé teleso je typ telesa, ktorého tvar sa počas behu simulácie nijako nezdeformuje. Vonkajšie sily nemajú žiaden vplyv na jeho tvar (na rozdiel od vplyvu na tvar časticového systému), čo znamená, že ľubovoľné dva body telesa si zachovávajú rovnakú vzdialenosť. Kvôli tomu je celkový pohyb takéhoto telesa zložený z lineárneho pohybu ťažiska telesa a rotácie telesa okolo neho.

Atribúty tuhého telesa môžeme zhrnúť do nasledovnej tabuľky, pričom ich rozdelíme na kinetické (nezávislé na hmotnosti, geometrické) a dynamické (závislé od hmotnosti, fyzikálne):

|  |  |
| --- | --- |
| Kinetické vlastnosti | Dynamické vlastnosti |
| Poloha | Rozloženie hmotnosti |
| Pozícia | $$c\left(t\right)\in R^{3x1}$$ | Hmotnosť | $$M\left(t\right)\in R^{1x1}$$ |
| Orientácia | $$q\left(t\right)\in R^{4x1}$$ | Inerčný tenzor | $$J\left(t\right)\in R^{3x3}$$ |
| Pohyb | Hybnosť |
| Lineárna rýchlosť | $$v\left(t\right)\in R^{3x1}$$ | Hybnosť | $$P\left(t\right)\in R^{3x1}$$ |
| Uhlová rýchlosť | $$ω\left(t\right)\in R^{3x1}$$ | Moment hybnosti | $$L\left(t\right)\in R^{3x1}$$ |
| Zrýchlenie | Sila |
| Lineárne zrýchlenie | $$a\left(t\right)\in R^{3x1}$$ | Sila | $$f\left(t\right)\in R^{3x1}$$ |
| Uhlové zrýchlenie | $$α\left(t\right)\in R^{3x1}$$ | Krútiaci moment | $$τ\left(t\right)\in R^{3x1}$$ |

Tabuľka 1: Vlastnosti tuhého telesa

1. Pozícia a orientácia

Pozícia tuhého telesa je reprezentovaná ako vektor so súradnicami (x, y, z). Orientáciu je možné definovať pomocou:

* Eulerovských uhlov $q =(φ, θ, ψ)$
* Rotačných matíc $R=\left(R\_{i,j}\right) \in R^{3x3}$
* Jednotkových kvaterniónov $q=(x, y, z, w) $
1. Rovnice pohybu

Rovnice pohybu tuhých telies s neobmedzeným pohybom sú derivácie pozície, orientácie, hybnosti a momentu hybnosti telesa. Súhrnne ich môžeme teda zapísať ako nasledujúce ODE:

$$\frac{d}{dt}x\left(t\right)=\frac{d}{dt}\left(\begin{matrix}c(t)\\q(t)\\P(t)\\L(t)\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}v(t)\\\frac{1}{2}Q(t)ω\left(t\right)\\f(t)\\τ(t)\end{matrix}\right)$$

Pomocné premenné v ODE vyššie sme dostali ako:

$$v\left(t\right)= M^{-1}P(t)$$

$$Q\left(t\right)= \left(\begin{matrix}+q\_{w}\left(t\right)&-q\_{z}\left(t\right)&+q\_{y}\left(t\right)\\+q\_{z}\left(t\right)&+q\_{w}\left(t\right)&-q\_{x}\left(t\right)\\-q\_{y}\left(t\right)&+q\_{x}\left(t\right)&+q\_{w}\left(t\right)\\-q\_{x}\left(t\right)&-q\_{y}\left(t\right)&-q\_{z}\left(t\right)\end{matrix}\right)$$

$$ω\left(t\right)= J^{-1}\left(t\right)L(t)$$

$$J^{-1}\left(t\right)=R(t)J\_{0}^{-1}R^{T}(t)$$

1. Rýchlosť

Rýchlosť (lineárnu) predstavuje derivácia pozície podľa času:

$$v\left(t\right)= c^{'}\left(t\right)= \frac{dc(t)}{dt}$$

1. Zrýchlenie

Zrýchlenie (lineárne) predstavuje derivácia rýchlosti podľa času:

$$a\left(t\right)= v^{'}\left(t\right)= \left(M^{-1}P\right)^{'}=M^{-1}P^{'}= M^{-1}f$$

$f$ predstavuje silu (derivácia hybnosti $P$ podľa času - $P^{'}(t)$)

1. Uhlová rýchlosť

Uhlová rýchlosť predstavuje vektor rovnobežný s osou rotácie, pričom jeho dĺžka je rovná rýchlosti rotácie (počet radiánov otočenia okolo osi za sekundu):

$$q^{'}\left(t\right)= \frac{1}{2}Q(t)ω\left(t\right)$$

$$Q\left(t\right)= \left(\begin{matrix}+q\_{w}\left(t\right)&-q\_{z}\left(t\right)&+q\_{y}\left(t\right)\\+q\_{z}\left(t\right)&+q\_{w}\left(t\right)&-q\_{x}\left(t\right)\\-q\_{y}\left(t\right)&+q\_{x}\left(t\right)&+q\_{w}\left(t\right)\\-q\_{x}\left(t\right)&-q\_{y}\left(t\right)&-q\_{z}\left(t\right)\end{matrix}\right)$$

1. Uhlové zrýchlenie

Uhlové zrýchlenie predstavuje derivácia uhlovej rýchlosti podľa času:

$$α\left(t\right)= ω^{'}\left(t\right)= (J^{-1}L)^{'}= J^{'-1}L+ J^{-1}L^{'}= -J^{-1}ω ×Jω+J^{-1}τ $$

$τ$ predstavuje krútiaci moment (derivácia momentu hybnosti $L$ podľa času - $L^{'}(t)$) a $J$ predstavuje inerčný tenzor.

1. Ťažisko a celková hmotnosť

Celkovú hmotnosť telesa vieme vyjadriť ako:

$$M= \sum\_{}^{}m\_{i} $$

Pri uvažovaní tuhého telesa ako množinu častíc určených pozíciou $p\_{i}$ a hmotnosťou $m\_{i}$ môžeme ťažisko telesa ($c)$ vyjadriť ako vážený priemer všetkých týchto častíc:

$$c= \frac{\sum\_{}^{}m\_{i}p\_{i}}{\sum\_{}^{}m\_{i}}= \frac{\sum\_{}^{}m\_{i}p\_{i}}{M}$$

Vďaka ťažisku vieme následne vyjadriť relatívnu pozíciu (pozícia v závislosti od ťažiska) i-tej častice ako:

$$p\_{i}=c+ r\_{i}$$

Taktiež vieme vyjadriť pomocou ťažiska, matice rotácie $R$ a relatívnej polohy i-tej častice na začiatku $r\_{0i} $aj absolútnu pozíciu i-tej častice:

$$p\_{i}=c+ Rr\_{0i}$$

1. Matica inercie

Inerčný tenzor definujeme s pomocou antisymetrickej matice vektorového súčinu $r^{×}$ ako:

$$r^{×}= \left(\begin{matrix}0&-r\_{z}&+r\_{y}\\+r\_{z}&0&-r\_{x}\\-r\_{y}&+r\_{x}&0\end{matrix}\right)$$

$$J= -\sum\_{}^{}m\_{i}r\_{i}^{×}r\_{i}^{×}= \sum\_{}^{}m\_{i}\left(\begin{matrix}r\_{iy}^{2}+r\_{iz}^{2}&-r\_{ix}r\_{iy}&-r\_{ix}r\_{iz}\\-r\_{iy}r\_{ix}&r\_{ix}^{2}+r\_{iz}^{2}&-r\_{iy}r\_{iz}\\-r\_{iz}r\_{ix}&-r\_{iz}r\_{iy}&r\_{ix}^{2}+r\_{iy}^{2}\end{matrix}\right)$$

Inerčný tenzor je závislý od času. Vypočítavame ho teda len na začiatku (keďže tuhé teleso sa nedeformuje) a jeho zmenu dopočítavame pomocou matice rotácie:

$$J\_{0}= -\sum\_{}^{}m\_{i}r\_{0i}^{×}r\_{0i}^{×}$$

$$J=RJ\_{0}R^{T}$$

$$J^{-1}=RJ\_{0}^{-1}R^{T}$$

V prípade, že je objekt zložený z viacerých tuhých telies, pričom váha každého telesa je $m\_{i}$, ťažisko $c\_{i}$ a inerčný tenzor $J\_{0i}$, celková inercia objektu J je rovná:

$$J= \sum\_{}^{}J\_{i}= \sum\_{}^{}(J\_{0i}+m\_{i}(c\_{i}^{T}c\_{i} I\_{3}- c\_{i}c\_{i}^{T}))$$

$I\_{3}$ predstavuje maticu identity veľkosti 3.