Matematické modelovanie a počítačová animácia fyzikálnych procesov Štátnicová otázka S5 – Dynamika tuhých telies, definícia problému, rovnice pohybu (4 ODE), rýchlosť, zrýchlenie, uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie, matica hybnosti (matica inercie)

Filip Pavlove a Jozef Kubík

30. decembra 2019

1. Tuhé telesá

Tuhé teleso je typ telesa, ktorého tvar sa počas behu simulácie nijako nezdeformuje. Vonkajšie sily nemajú žiaden vplyv na jeho tvar (na rozdiel od vplyvu na tvar časticového systému), čo znamená, že ľubovoľné dva body telesa si zachovávajú rovnakú vzdialenosť. Kvôli tomu je celkový pohyb takéhoto telesa zložený z lineárneho pohybu ťažiska telesa a rotácie telesa okolo neho.

Atribúty tuhého telesa môžeme zhrnúť do nasledovnej tabuľky, pričom ich rozdelíme na kinetické (nezávislé na hmotnosti, geometrické) a dynamické (závislé od hmotnosti, fyzikálne):

Kinetické vlastnosti		Dynamické vlastnosti	
Poloha		Rozloženie hmotnosti	
Pozícia	$c(t) \in R^{3x1}$	Hmotnosť	$M(t) \in R^{1x1}$
Orientácia	$q(t) \in R^{4x1}$	Inerčný tenzor	$J(t) \in R^{3x3}$
Pohyb		Hybnosť	
Lineárna rýchlosť	$v(t) \in R^{3x1}$	Hybnosť	$P(t) \in R^{3x1}$
Uhlová rýchlosť	$\omega(t) \in R^{3x1}$	Moment hybnosti	$L(t) \in R^{3x1}$
Zrýchlenie		Sila	
Lineárne zrýchlenie	$a(t) \in R^{3x1}$	Sila	$f(t) \in R^{3x1}$
Uhlové zrýchlenie	$\alpha(t) \in R^{3x1}$	Krútiaci moment	$\tau(t) \in R^{3x1}$

Tabuľka 1: Vlastnosti tuhého telesa

2. Pozícia a orientácia

Pozícia tuhého telesa je reprezentovaná ako vektor so súradnicami (x, y, z). Orientáciu je možné definovať pomocou:

- Eulerovských uhlov $q = (\varphi, \theta, \psi)$
- Rotačných matíc $R = (R_{i,j}) \in R^{3x3}$
- Jednotkových kvaterniónov $q = (x, y, z, w)$

3. Rovnice pohybu

Rovnice pohybu tuhých telies s neobmedzeným pohybom sú derivácie pozície, orientácie, hybnosti a momentu hybnosti telesa. Súhrnne ich môžeme teda zapísať ako nasledujúce ODE:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c(t) \\ q(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \frac{1}{2}Q(t)\omega(t) \\ f(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Pomocné premenné v ODE vyššie sme dostali ako:

$$v(t) = M^{-1}P(t)$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} +q_w(t) & -q_z(t) & +q_y(t) \\ +q_z(t) & +q_w(t) & -q_x(t) \\ -q_y(t) & +q_x(t) & +q_w(t) \\ -q_x(t) & -q_y(t) & -q_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\omega(t) = J^{-1}(t)L(t)$$

$$J^{-1}(t) = R(t)J_0^{-1}R^T(t)$$

4. Rýchlosť

Rýchlosť (lineárnu) predstavuje derivácia pozície podľa času:

$$v(t) = c'(t) = \frac{dc(t)}{dt}$$

5. Zrýchlenie

Zrýchlenie (lineárne) predstavuje derivácia rýchlosti podľa času:

$$a(t) = v'(t) = (M^{-1}P)' = M^{-1}P' = M^{-1}f$$

f predstavuje silu (derivácia hybnosti P podľa času - $P'(t)$)

6. Uhlová rýchlosť

Uhlová rýchlosť predstavuje vektor rovnobežný s osou rotácie, pričom jeho dĺžka je rovná rýchlosti rotácie (počet radiánov otočenia okolo osi za sekundu):

$$q'(t) = \frac{1}{2}Q(t)\omega(t)$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} +q_w(t) & -q_z(t) & +q_y(t) \\ +q_z(t) & +q_w(t) & -q_x(t) \\ -q_y(t) & +q_x(t) & +q_w(t) \\ -q_x(t) & -q_y(t) & -q_z(t) \end{pmatrix}$$

7. Uhlové zrýchlenie
   Uhlové zrýchlenie predstavuje derivácia uhlovej rýchlosti podľa času:

$$\alpha(t) = \omega'(t) = (J^{-1}L)' = J'^{-1}L + J^{-1}L' = -J^{-1}\omega \times J\omega + J^{-1}\tau$$

   τ predstavuje krútiaci moment (derivácia momentu hybnosti L podľa času - $L'(t)$) a J predstavuje inerčný tenzor.

8. Ťažisko a celková hmotnosť
   Celkovú hmotnosť telesa vieme vyjadriť ako:

$$M = \sum m_i$$

   Pri uvažovaní tuhého telesa ako množinu častíc určených pozíciou p_i a hmotnosťou m_i môžeme ťažisko telesa (c) vyjadriť ako vážený priemer všetkých týchto častíc:

$$c = \frac{\sum m_i p_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i p_i}{M}$$

   Vďaka ťažisku vieme následne vyjadriť relatívnu pozíciu (pozícia v závislosti od ťažiska) i-tej častice ako:

$$p_i = c + r_i$$

   Taktiež vieme vyjadriť pomocou ťažiska, matice rotácie R a relatívnej polohy i-tej častice na začiatku r_{0i} aj absolútnu pozíciu i-tej častice:

$$p_i = c + Rr_{0i}$$

9. Matica inercie
   Inerčný tenzor definujeme s pomocou antisymetrickej matice vektorového súčinu $r^{\times}$ ako:

$$r^{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -r_z & +r_y \\ +r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & +r_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = -\sum m_i r_i^{\times} r_i^{\times} = \sum m_i \begin{pmatrix} r_{iy}^2 + r_{iz}^2 & -r_{ix}r_{iy} & -r_{ix}r_{iz} \\ -r_{iy}r_{ix} & r_{ix}^2 + r_{iz}^2 & -r_{iy}r_{iz} \\ -r_{iz}r_{ix} & -r_{iz}r_{iy} & r_{ix}^2 + r_{iy}^2 \end{pmatrix}$$

Inerčný tenzor je závislý od času. Vypočítavame ho teda len na začiatku (keďže tuhé teleso sa nedeformuje) a jeho zmenu dopočítavame pomocou matice rotácie:

$$J_0 = -\sum m_i r_{0i}^{\times} r_{0i}^{\times}$$

$$J = R J_0 R^T$$

$$J^{-1} = R J_0^{-1} R^T$$

V prípade, že je objekt zložený z viacerých tuhých telies, pričom váha každého telesa je m_i, ťažisko c_i a inerčný tenzor J_{0i}, celková inercia objektu J je rovná:

$$J = \sum J_i = \sum (J_{0i} + m_i (c_i^T c_i \, I_3 - c_i c_i^T))$$

I_3 predstavuje maticu identity veľkosti 3.