

8. Diferenciálne rovnice

Ilustračný príklad 1: Hľadáme krivku $y = y(x)$, ktorá má tú vlastnosť, že normála v každom jej bode (x_0, y_0) prechádza daným pevným bodom $(0, 0)$. Rovnica normály funkcie $y(x)$ v bode (x_0, y_0) je

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

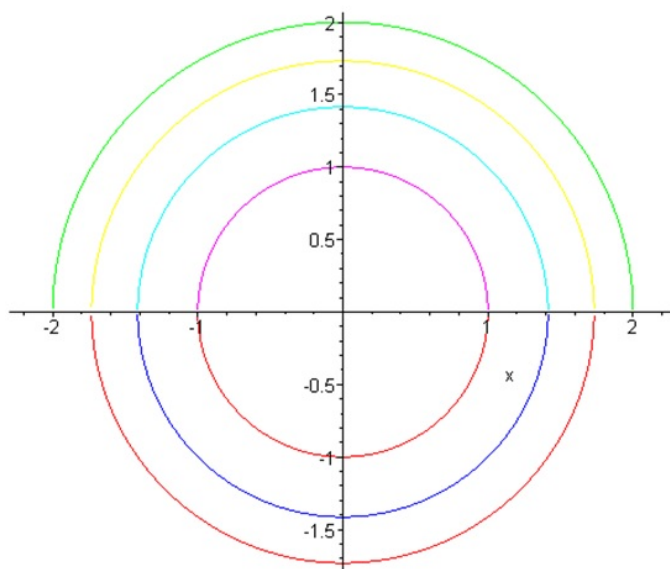
Ak dosadíme do rovnice normály súradnice bodu $(x, y) = (0, 0)$, pre ľubovoľný bod (x_0, y_0) dostaneme:

$$-y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(-x_0)$$

a po preznačení a úprave

$$y' = -\frac{x}{y},$$

čo je tzv. diferenciálna rovnica so separovanými premennými. Riešním tejto rovnice je $x^2 + y^2 = c$, kde c je kladná konštanta. Hľadané krivky sú teda kružnice so stredom v bode $(0, 0)$ a ľubovoľným polomerom.



Ilustračný príklad 2: Čím je teplejšie v miestnosti, do ktorej vojdem, tým rýchlejšie sa zohrejem.

T - rozdiel teploty v miestnosti a mojej teploty, ktorý sa mení v závislosti od času t

$\frac{dT}{dt}$ - ako rýchlo sa zohrievam, ako rýchlo s časom sa mení rozdiel teploty v miestnosti a mojej teploty

kT - zohrievam sa úmerne teplote v miestnosti

$$\frac{dT}{dt} = kT, \quad \text{resp.} \quad T' = kT$$

Definícia 8.1: Diferenciálna rovnica - matematická rovnica, v ktorej ako neznáma vystupuje funkcia (jednej, či viacerých premenných) so svojou deriváciou

Definícia 8.2: Klasifikácia diferenciálnych rovníc:

1. podľa druhu

- **obyčajná diferenciálna rovnica** - rovnica s neznámou funkciou jednej premennej, napr. $y(x)$ - y -závislá premenná, x -nezávislá premenná

$$2y'(x) + x^2y(x) = 0, \quad (x+1)y''(x) + 5y'(x) = \sin x$$

- **parciálna diferenciálna rovnica** - rovnica s neznámou funkciou viacerých premenných, napr. $z(x, y)$

$$z'_x(x, y) + z''_{yy}(x, y) = x + y$$

2. podľa tvaru

- **lineárna diferenciálna rovnica** - v rovnici nie je súčin funkcie a jej derivácie

$$y'(x) + y(x) = x, \quad 5y''(x) + xy'(x) = 0$$

- **nelineárna diferenciálna rovnica** - v rovnici je súčin funkcie a jej derivácie

$$2y'(x) \cdot y(x) = 0, \quad y''(x) \cdot y(x) = xy(x)$$

3. podľa najväčšieho rádu derivácie

- **1. rádu** obsahuje deriváciu funkcie najviac 1. rádu

$$y'(x) + y(x) = x, \quad 2y'(x) \cdot y(x) = 0$$

- **2. rádu** obsahuje deriváciu funkcie najviac 2. rádu

$$5y''(x) + xy'(x) = 0, \quad y''(x) \cdot y(x) = xy(x)$$

- **n -tého rádu** obsahuje deriváciu funkcie najviac n -tého rádu

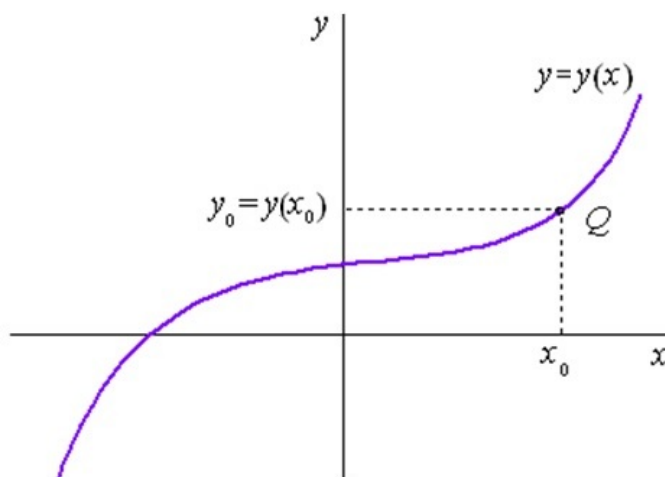
$$y'''(x) + y''(x) = 0, \quad y^{(n)}(x) + y^{(n-2)}(x) = xy(x)$$

Definícia 8.3:

- **riešenie diferenciálnej rovnice** - funkcia $y(x)$, ktorá po dosadení do diferenciálnej rovnice spĺňa túto rovnicu
- **všeobecné riešenie** - množina všetkých riešení diferenciálnej rovnice - obsahuje toľko konštánt, akého rádu je rovnica
- **partikulárne riešenie** - jedno konkrétne riešenie diferenciálnej rovnice, ktoré vznikne zo všeobecného riešenia vhodnou voľbou konštánt
- **singulárne riešenie** - je riešenie, ktoré neobsahuje žiadnu konštantu a nedá sa získať zo všeobecného riešenia
- **integrálna krivka** - graf riešenia diferenciálnej rovnice

- **Cauchyho začiatkové podmienky** - podmienky riešenie rovnice pre hodnotu $x = x_0$ - toľko podmienok, koľko je rád diferenciálnej rovnice

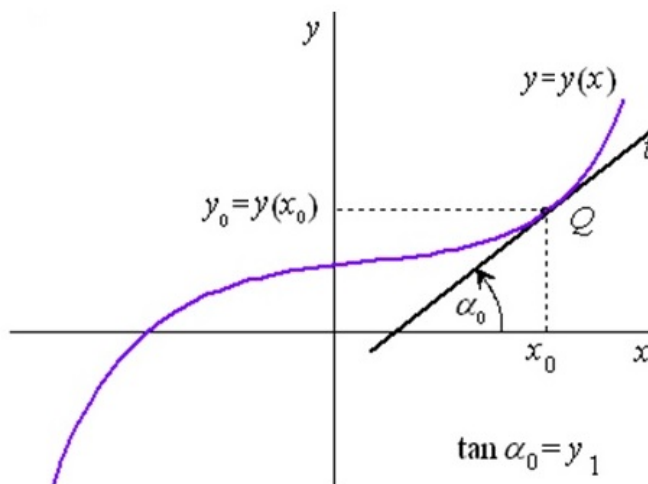
$y(x_0) = y_0$, pre dané hodnoty x_0, y_0



Geometrická interpretácia Cauchyho začiatkovej podmienky:

- pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu - hľadaná integrálna krivka prechádza bodom (x_0, y_0)

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ pre dané hodnoty x_0, y_0, y_1



Geometrická interpretácia Cauchyho začiatkovej podmienky:

- pre diferenciálnu rovnicu 1. rádu - hľadaná integrálna krivka prechádza bodom (x_0, y_0)
- pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu - hľadaná integrálna krivka prechádza bodom (x_0, y_0) a má v tomto bode dotyčnicu so smernicou y_1

ROVNICE NEOBSAHUJÚCE NEZNÁMU FUNKCIU

Tvar rovnice je

$$y'(x) = f(x),$$

kde $f(x)$ je funkcia definovaná a spojitá na intervale (a, b) .

Riešenie má tvar

$$y(x) = \int f(x)dx = F(x) + c,$$

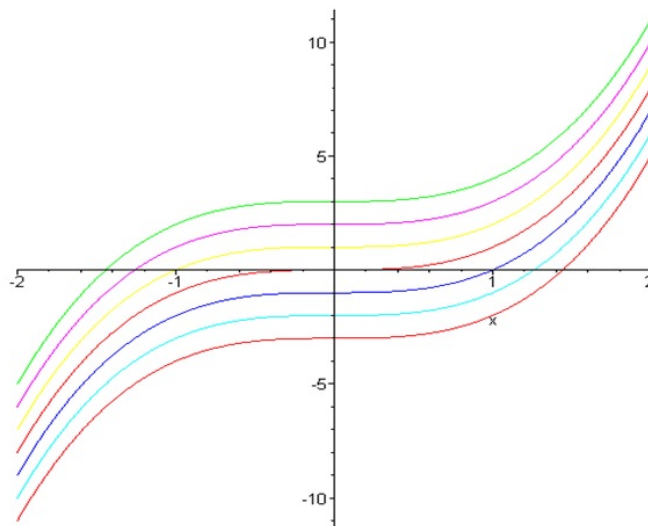
kde c je ľubovoľná konštanta a $F(x)$ je primitívna funkcia k $f(x)$.

Príklad 1: Nájdite riešenia rovnice

$$y' = 3x^2$$

so začiatočnou podmienkou $y(-1) = 0$.

Všeobecné riešenie je $y(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c$. Z Cauchyho podmienky máme $y(-1) = (-1)^3 + c$, teda $0 = -1 + c$, preto $c = 1$ a partikulárne riešenie je $y(x) = x^3 + 1$ (žltá integrálna krivka).



ROVNICE SO SEPAROVANÝMI A SEPAROVATEĽNÝMI PREMENNÝMI

Tvar rovnice so **separovanými premennými** je

$$f(x) + g(y)y' = 0,$$

kde $f(x)$ je funkcia definovaná a spojitá na intervale (a, b) a $g(y)$ je funkcia definovaná a spojitá na intervale (c, d) .

Riešenie má tvar

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c, \quad \text{resp.} \quad \int g(y)dy = - \int f(x)dx$$

kde c je ľubovoľná konštanta. Ak je $g(y) \neq 0$ na intervale (c, d) , potom každým bodom množiny $(a, b) \times (c, d)$ prechádza práve jedna integrálna krivka.

Tvar rovnice so **separovateľnými premennými** je

$$f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)y' = 0,$$

kde $f_1(x)$, $f_2(x)$ sú funkcie definované a spojité na intervale (a, b) a $g_1(y)$, $g_2(y)$ sú funkcie definované a spojité na intervale (c, d) .

Ak je $f_2(x)g_1(y) \neq 0$, potom rovnica je ekvivalentná s

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}y' = 0,$$

a riešenie má tvar

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta.

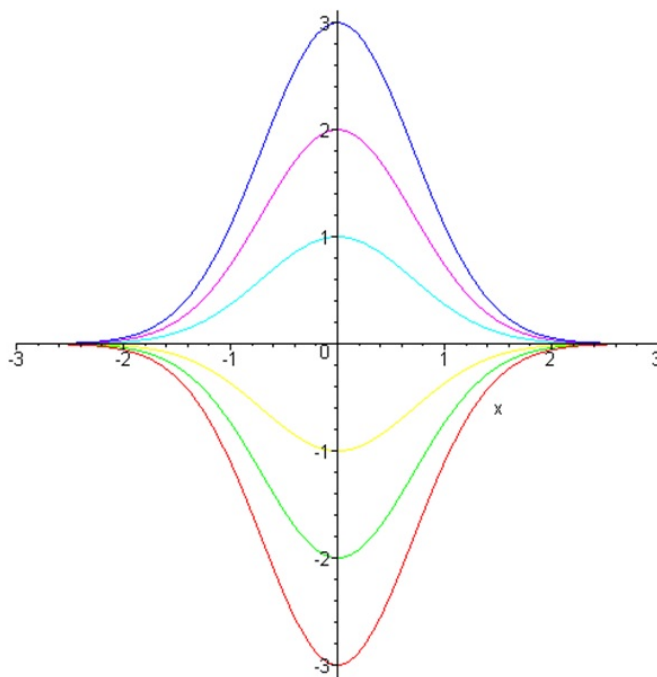
Ak je $g_1(y) = 0$ pre nejakú konštantu b , tak konštantná funkcia $y = b$ je tiež riešením.

Príklad 2: Nájdite riešenia rovnice

$$2x + \frac{y'}{y} = 0,$$

ktoré prechádza bodom $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

Riešenie hľadáme v tvare $\int 2x dx + \int \frac{1}{y} dy = c$, teda $x^2 + \ln|y| = c$. Z Cauchyho začiatočnej podmienky máme $y(0) = -1$, teda $0 + \ln|-1| = c$, preto $c = 0$ a partikulárne riešenie je $x^2 + \ln|y| = 0$ a ak uvažujeme $y < 0$, tak je možné upraviť výsledok na tvar $y = -e^{-x^2}$ (žltá integrálna krivka).



Príklad 3:

Nájďme všetky riešenia diferenciálnej rovnice

$$xy' = y^2 - y$$

Táto rovnica je rovnica so separovateľnými premennými.

Aby sme to mohli upraviť na rovnicu so separovanými premennými, potrebujeme deliť s funkciami $f_2(x) = x$ a $g_1(y) = y^2 - y$.

Delenie môžeme urobiť len ak $x \neq 0$, preto uvažujeme riešenie na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Ďalej musíme rozobrať dva prípady pre g_1 :

1. ak $g_1(y) = y^2 - y = 0$, tak konštantné funkcia $y \equiv 0$ a $y \equiv 1$ sú riešeniami diferenciálnej rovnice

2. ak $g_1(y) = y^2 - y \neq 0$, tak môžeme vydeliť rovnicu s týmto výrazom a riešime rovnicu nasledovne:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

Po výpočte integrálov dostaneme

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln|x| + C_1 \Rightarrow \left| \frac{y-1}{y} \right| = |x|e^{C_1}$$

Ak označíme $e^{C_1} = C_2$, tak

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = |x|C_2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{y} = \pm C_2 x$$

pre $C_2 > 0$, ale keďže aj $y \equiv 1$ je riešením (čo by sme dostali, ak by $C_2 = 0$), spolu to môžeme písať ako

$$y = \frac{1}{1 + Cx}$$

pre $C \in \mathbb{R}$, ale samozrejme nezabudneme ani na riešenie $y \equiv 0$.

LINEÁRNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE PRVÉHO RÁDU

Tvar rovnice je

$$y' + f(x)y = g(x),$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ sú funkcie definované a spojité na intervale (a, b) .

Delíme ich na

- **homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu**, ak $g(x) = 0$
- **nehomogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu**, ak $g(x) \neq 0$.

Riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice, teda $y' + f(x)y = 0$ (nakoľko je to aj rovnica so separovateľnými premennými) má tvar

$$y(x) = ce^{-\int f(x)dx}$$

kde c je ľubovoľná konštanta.

Vlastnosti homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice:

- pre danú začiatočnú podmienku existuje práve jedno riešenie
- homogénna lineárna diferenciálna rovnica má vždy riešenie, a to triviálne, teda $y(x) = 0$
- každá integrálna krivka homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice leží buď celá nad osou x , alebo celá pod osou x , jediná integrálna krivka tejto rovnice, ktorá má bod na osi je $y(x) = 0$

Príklad 4:

Nájdime najprv všeobecné riešenie rovnice

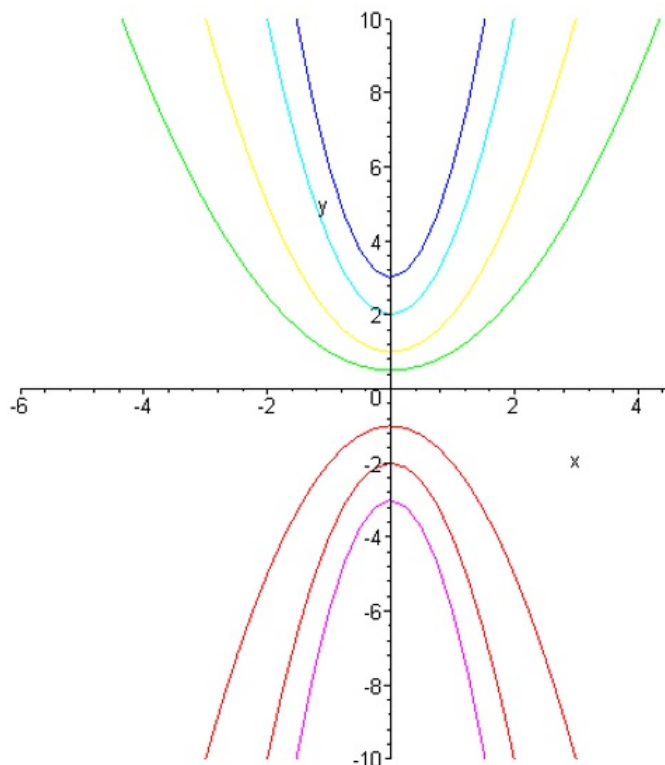
$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$$

a potom riešenie, ktoré prechádza bodom $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Podľa vzorca všeobecné riešenie je

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = \\ &= Ce^{\ln(1+x^2)} = C(1+x^2) \end{aligned}$$

Riešenie, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(1) = 2$ je potom $y(x) = 1 + x^2$ (žltá krivka).



Riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(x) = ce^{-\int f(x)dx} + e^{-\int f(x)dx} \left(\int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right)$$

kde c je ľubovoľná konštanta.

Vlastnosti nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice:

- pre danú začiatočnú podmienku existuje práve jedno riešenie
- funkcia, ktorú dostaneme ako rozdiel dvoch riešení nehomogénnej diferenciálnej rovnice, je riešením homogénnej diferenciálnej rovnice
- všeobecné riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice (y_{VNH}) je súčtom všeobecného riešenia homogénnej diferenciálnej rovnice (y_{VH}) a partikulárneho riešenia nehomogénnej diferenciálnej rovnice (y_{PNH})

- ak y_1 je riešenie nehomogénnej rovnice s pravou stranou $g_1(x)$ a y_2 je riešenie nehomogénnej rovnice s pravou stranou $g_2(x)$, tak ak $y_1 + y_2$ je riešenie nehomogénnej rovnice s pravou stranou $g_1(x) + g_2(x)$
- metódy na zistenie partikulárneho riešenia nehomogénnej diferenciálnej rovnice:
 - metóda variácie konštánt
 - Eulerova metóda

Príklad 5:

Nájďme riešenie rovnice $y' - \frac{y}{x} = xe^x$, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $y(1) = 5$.

y_{VH} :

Rovnica $y' - \frac{y}{x} = 0$ je separovaná, preto:

1. $y \equiv 0$ je riešenie

2. ak $y \neq 0$, tak

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c_1 \Rightarrow y = cx$$

kde $c \in \mathbb{R} - \{0\}$

Obidve možnosti 1. a 2. sa dajú napísať spolu $y_{VH} = Cx$, kde $C \in \mathbb{R}$.

y_{PNH} :

Metóda variácie konštánt:

To vlastne znamená, že namiesto konštanty C v y_{VH} uvažujeme o funkcii $C(x)$, ktorú dourčíme z toho, že $y_{PNH} = C(x)x$ je, ako aj názov hovorí, partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice.

$$y'_{PNH} = C'(x)x + C(x)$$

Dosadením do danej diferenciálnej rovnice získame

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = xe^x \Rightarrow C'(x) = e^x \Rightarrow C(x) = e^x$$

preto $y_{PNH} = e^x x$ a všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice je $y_{VNH} = Cx + xe^x$.

Eulerova metóda:

Pri tejto metóde nepotrebujeme zisťovať osobitne y_{VH} . Táto metóda spočíva v tom, že ak rovnicu $y' + p(x)y = q(x)$ vynásobím výrazom $e^{\int p(x)dx}$, na ľavej strane diferenciálnej rovnice dostaneme deriváciu $(ye^{\int p(x)dx})'$. Stačí potom celú rovnicu (ľavú aj pravú stranu) zintegrovať.

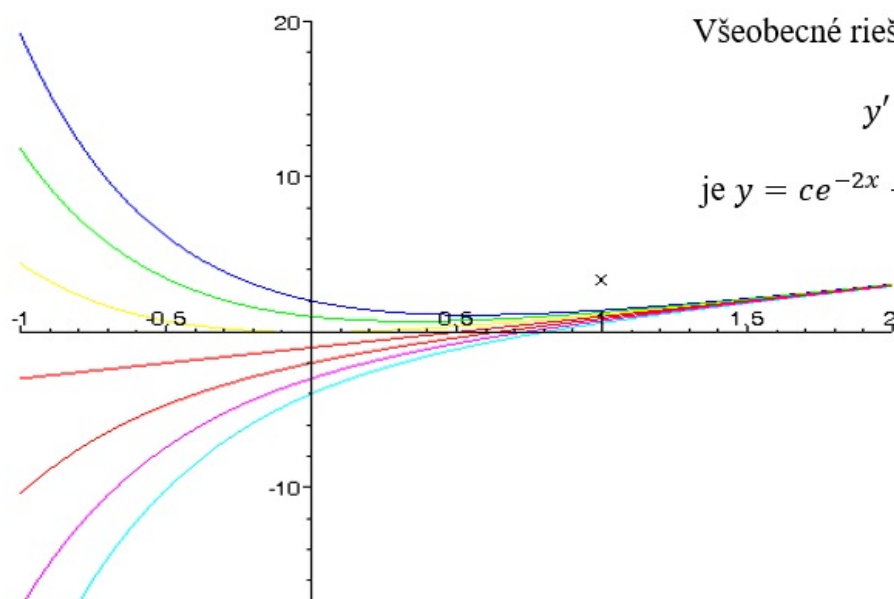
Čo v našom prípade znamená, že násobíme výrazom

$$e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$$

a dostaneme

$$\left(y \frac{1}{x}\right)' = e^x \Rightarrow \frac{y}{x} = \int e^x dx \Rightarrow \frac{y}{x} = e^x + C \Rightarrow y = xe^x + Cx.$$

Riešenie začiatočnej podmienky je potom $y = (5 - e)x + xe^x$.

Príklad 6:

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y' + 2y = 4x$$

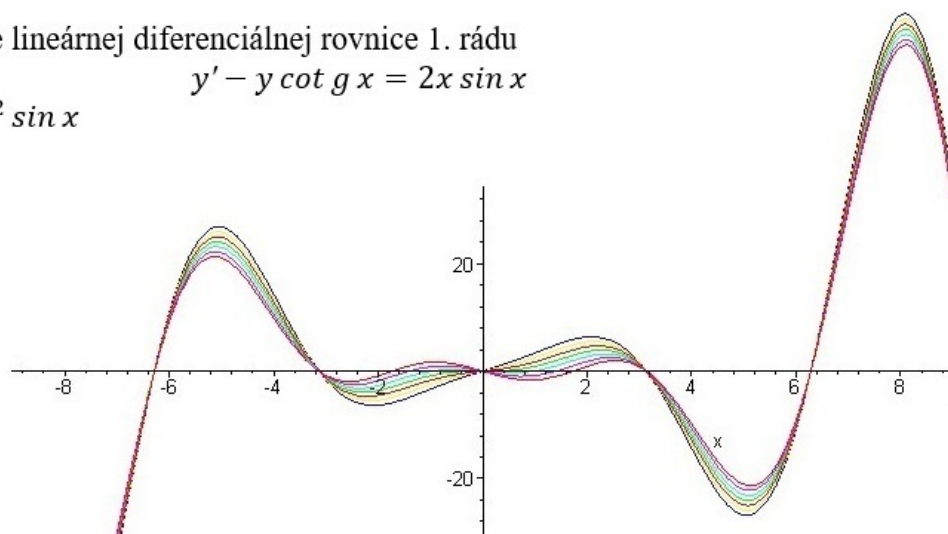
$$\text{je } y = ce^{-2x} + 2x - 1$$

Príklad 7:

Všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 1. rádu

$$y' - y \cot g x = 2x \sin x$$

$$\text{je } y = c \sin x + x^2 \sin x$$



LINEÁRNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE DRUHÉHO RÁDU S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTMI

Tvar rovnice je

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

kde a_0, a_1, a_2 sú dané čísla.

Riešenia hľadáme v tvare

$$y = e^{\lambda x},$$

kde λ je číslo, ktoré rieši kvadratickú rovnicu

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

tzv. **charakteristickú rovnicu**.

Môžu nastať nasledujúce prípady:

- a) λ_1, λ_2 sú 2 rôzne reálne korene,
- b) $\lambda_1 = \lambda_2$ je dvojnásobný reálny koreň,
- c) λ_1, λ_2 sú komplexné korene, pričom sú navzájom komplexne združené, tj. $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$.

V závislosti od týchto možností diferenciálna rovnica má nasledovné riešenia:

- a) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = e^{\lambda_2 x}$,
- b) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$,
- c) $y_1 = e^{(a+ib)x}$ a $y_2 = e^{(a-ib)x}$.

Všeobecné riešenie potom je v tvare lineárnej kombinácie týchto 2 riešení, teda $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$:

a)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

b)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x},$$

c)

$$y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x},$$

pričom ak napíšeme komplexnú funkciu $e^{ax \pm ibx}$ v goniometrickom tvare $e^{ax}(\cos(bx) \pm i \sin(bx))$, a pre tieto uvažujeme lineárnu kombináciu, tak získame

$$y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx).$$

Príklad 8:

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

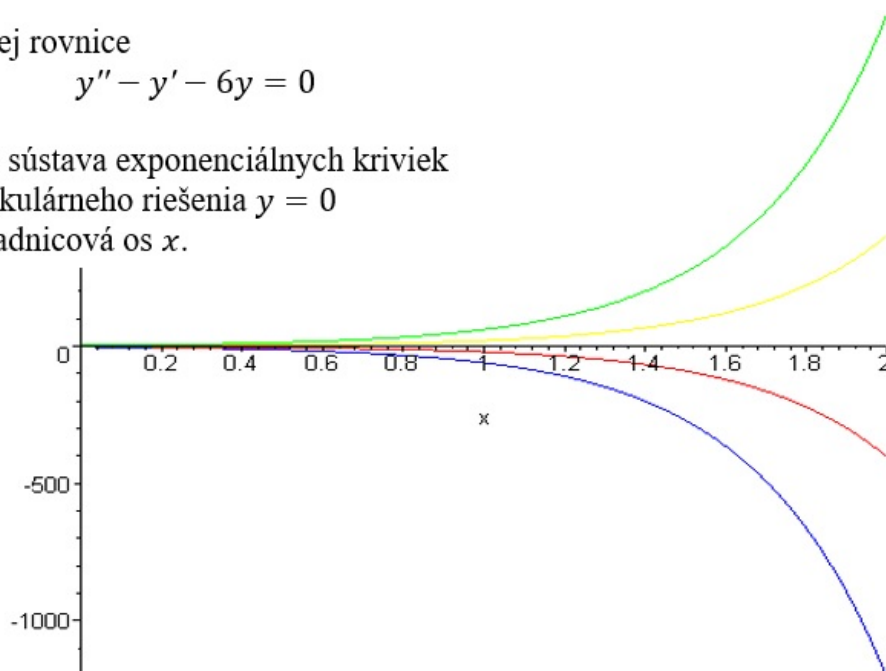
$$y'' - y' - 6y = 0$$

je $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

Grafom všeobecného riešenia je sústava exponenciálnych kriviek

pre $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, grafom partikulárneho riešenia $y = 0$

pre $c_1 = c_2 = 0$ je priamka, súradnicová os x .

Príklad 9:

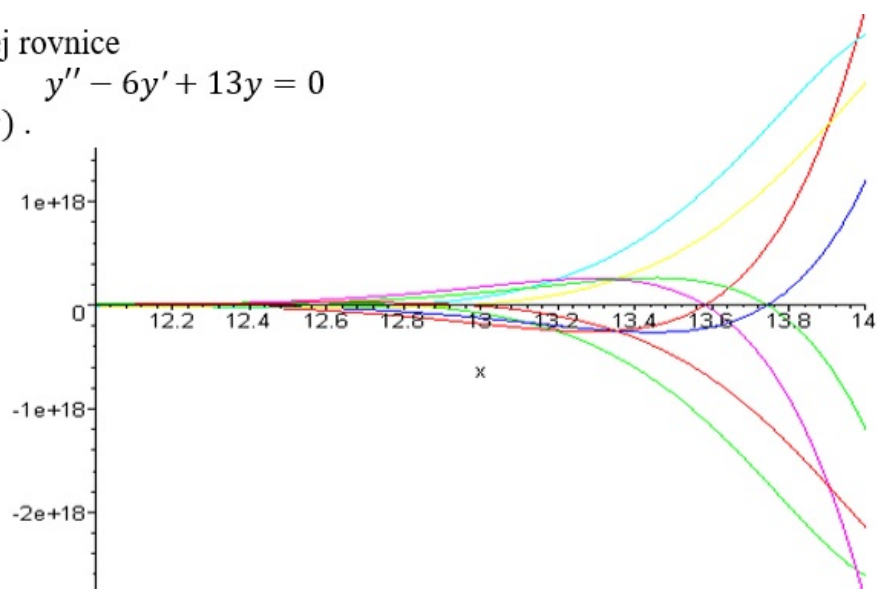
Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 4y' + 4y = 0$ je $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$.

Príklad 10:

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

je $y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

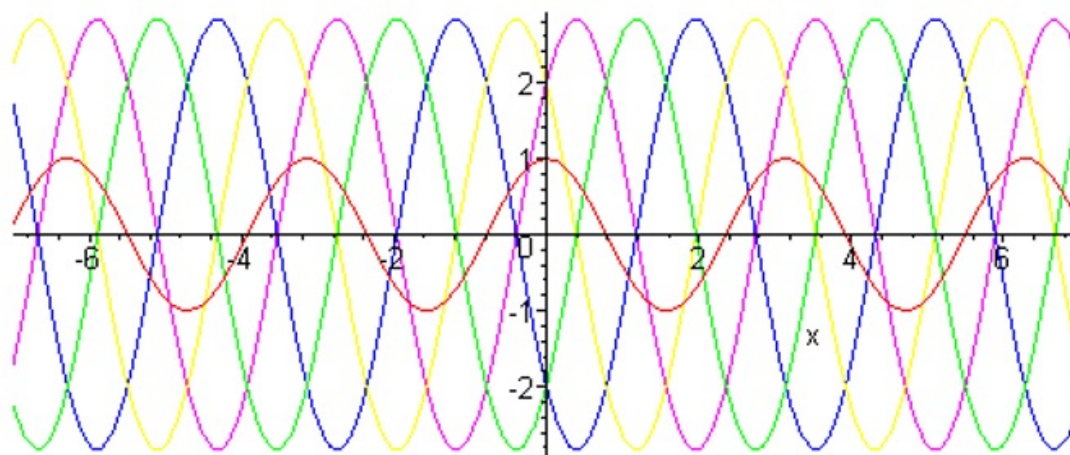


Príklad 11:

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + 4y = 0$$

je $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ a partikulárne riešenie, ktoré spĺňa začiatočné podmienky $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$ dostaneme po dosadení $c_1 = 1, c_2 = 0$. Hľadané partikulárne riešenie je funkcia $y = \cos 2x$ (červená krivka).



Obrázky sú čerpané z materiálu Matematika II zo stránky <http://www.evln.stuba.sk/velichova/pedagog.htm>