

I. KOSOUHLÁ AXONOMETRIA

1. Princíp zobrazenia, základné pojmy

Princíp zobrazenia sa líši od pravouhlej axonometrie len tým, že osnova premietania $\{s\}$ nie je kolmá na priemetňu ε .

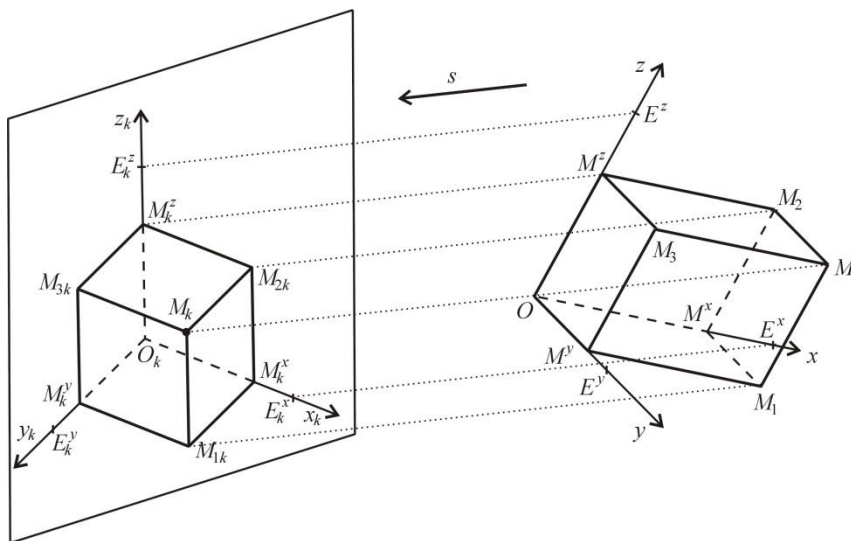
Definícia 1.1

Základné pojmy a označenia:

- axonometrická súradnicová sústava – $\langle O_k; E_k^x, E_k^y, E_k^z \rangle$,
- axonometrické jednotky – $e_k^x = |O_k E_k^x|$, $e_k^y = |O_k E_k^y|$, $e_k^z = |O_k E_k^z|$,
- axonometrický trojuholník – ΔXYZ ($X = x \cap \varepsilon, Y = y \cap \varepsilon, Z = z \cap \varepsilon$),
- axonometrický priemet bodu M – M_k ($M_k = l^M \cap \varepsilon$, kde l^M je premietacia priamka bodu M),
- axonometrický pôdorys [nárys, bokorys] – $M_{1k} [M_{2k}, M_{3k}]$ ($M_{ik} = l^{M_i} \cap \varepsilon$, kde l^{M_i} je premietacia priamka bodu $M_i, i=1,2,3$),
- i -tá ordinála – (za predpokladu, že $M_k \neq M_{ik}$) $\overrightarrow{M_k M_{ik}}, i=1,2,3$,

Definícia 1.2

Bijektívne zobrazenie $\varphi: E_3 \rightarrow \varepsilon \times \varepsilon$, $\varphi: M \rightarrow (M_k, M_{1k})$ [alebo $(M_k, M_{2k}), (M_k, M_{3k})$], pričom $M_k M_{1k} \parallel z_k$ [$M_k M_{2k} \parallel y_k, M_k M_{3k} \parallel x_k$] alebo $M_k = M_{1k}$ [$M_k = M_{2k}, M_k = M_{3k}$] sa nazýva **metóda kosohlej (šikmej) axonometrie**.



Veta 1.1

Ak $\alpha = \angle(l, \varepsilon)$, tak pre pomery skrátenia $u = \frac{e_k^x}{e}$, $v = \frac{e_k^y}{e}$, $w = \frac{e_k^z}{e}$ platí: $u^2 + v^2 + w^2 = 2 - \cot^2 \alpha$.

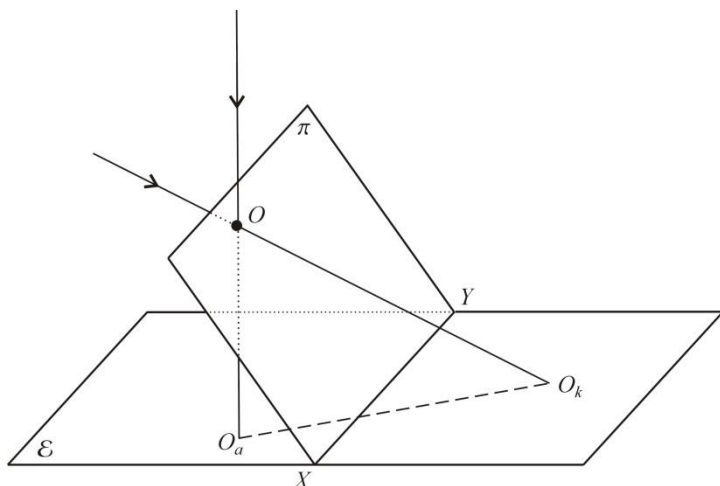
Kosouhlá axonometria je určená :

- axonometrickou súradnicovou sústavou,
- axonometrickým trojuholníkom a šikmým priemetom súradnicového začiatku.

Bez dôkazu.

Úloha 1.1: Daný je axonometrický trojuholník $\triangle XYZ$ a bod O_k . Zvoľme si ľubovoľný bod $M = (M_k, M_{1k})$. Zostrojme kolmý priemet bodu M do axonometrickej priemetne ε (t.j. previesť šikmú axonometriu na šikmé premietanie s pomocným pravouhlým premietaním).

Riešenie:



2. Základná veta šikmej axonometrie

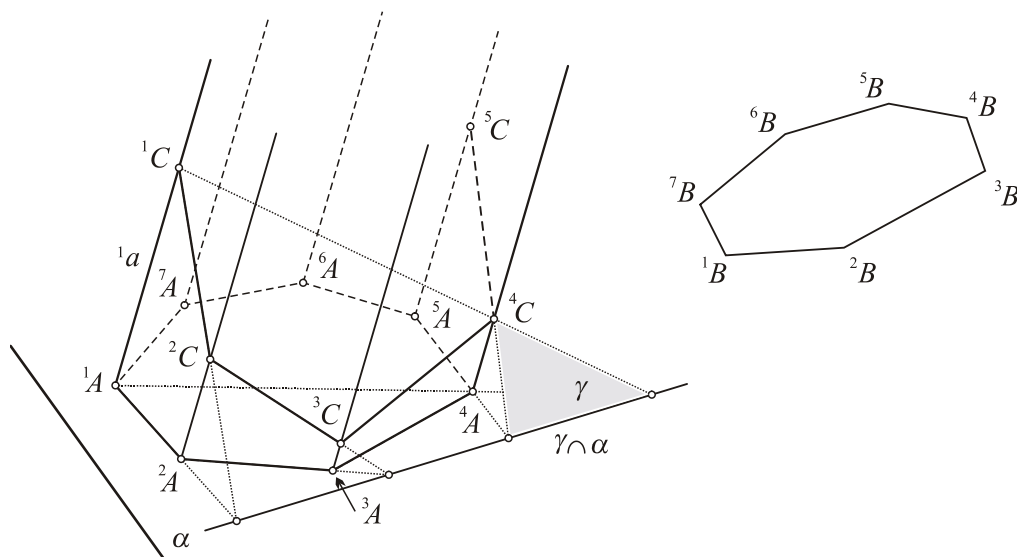
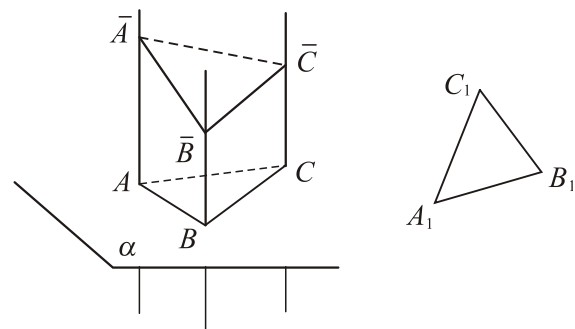
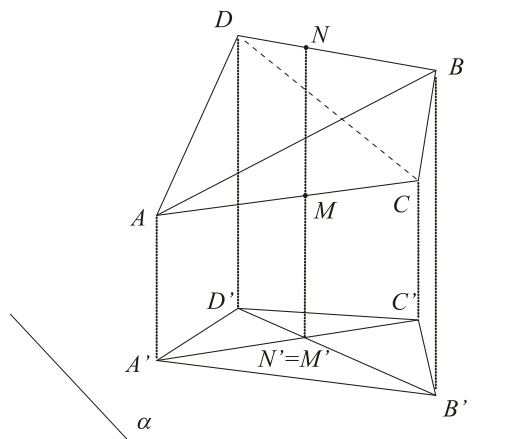
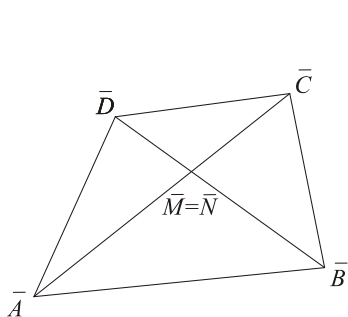
Veta 2.1 - Pohlke-Schwarz-ova veta

Vrcholy ľubovoľného štvoruholníka v rovine možno považovať za rovnobežný priemet vrcholov štvorstena vopred zvoleného tvaru (t.j. podobného s ľubovoľným daným štvorstenom).

Dôsledok: ľubovoľné tri rôzne úsečky $O_k E_k^x$, $O_k E_k^y$, $O_k E_k^z$ v jednej rovine možno považovať za rovnobežné priemety troch rovnako dlhých a navzájom kolmých úsečiek OE^x , OE^y , OE^z .

Pomocné tvrdenia:

- 1) Každú afinitu dvoch rovinných polí možno vyjadriť v tvare kompozície podobnosti a pravouhlého premietania.
- 2) Každú trojbokú hranolovú plochu 3H možno preťať rovinou tak, aby prienikom bol trojuholník ľubovoľného tvaru, t.j. podobný ľubovoľnému danému trojuholníku.
- 3) Každú n -bokú hranolovú plochu nH možno preťať rovinou tak, aby jej prienik s plochou bol n -uholník podobný ľubovoľnému danému n -uholníku, ktorý je afinný s určujúcim n -uholníkom plochy nH .

**Dôkaz Vety 2.1:**

Nech je daný štvorsten $ABCD$ a štvoruholník $\overline{A\bar{B}C\bar{D}}$. Naša úloha je dokázať, že existuje štvorsten (označme ho napr. $A^0B^0C^0D^0$), ktorý je podobný s štvorstenom $ABCD$ a ktorého rovnobežný priemet do roviny (napr. priemetňa) je $\overline{A\bar{B}C\bar{D}}$. Premietacie priamky vrcholov štvorstena $ABCD$ vytvárajú štvorbokú

hranolovú plochu 4H , ktorú možno (na základe pomocného tvrdenia 3.) preťať rovinou (v pomocnej vete je to rovina γ) tak, aby jej prienik s touto hranolovou plochou bol štvoruholník (označme ho napr. $A_1B_1C_1D_1$) podobný štvoruholníku $\overline{A\bar{B}C\bar{D}}$, pričom ale štvoruholník $\overline{A\bar{B}C\bar{D}}$ musí byť afinný s určujúcim štvoruholníkom hranolovej plochy (môžeme ho značiť $A'B'C'D'$).

Stačí teda dokázať, že existuje rovina α taká, že rovnobežným prietom daného štvorstena $ABCD$ do tejto roviny bude štvoruholník $A'B'C'D'$ (určujúci štvoruholník plochy 4H z pomocného tvrdenia 3.) afinný s daným štvoruholníkom $\overline{A\bar{B}C\bar{D}}$.

Ak takéto rovnobežné premietanie existuje, tak do priesečníka uhlopriečok predpokladaného štvoruholníka $A_1B_1C_1D_1$ v rovine γ sa premietnu dva body. Jeden bod M je bodom hrany AC , druhý bod N je bodom hrany BD . Keďže chceme taký štvoruholník $A_1B_1C_1D_1$, ktorý bude podobný štvoruholníku $\overline{A\bar{B}C\bar{D}}$, tak pre deliaci pomer príslušných bodov musí platiť $(A_1C_1M_1) = (\overline{A\bar{C}\bar{M}})$ a $(B_1D_1N_1) = (\overline{B\bar{D}\bar{N}})$. A keďže okrem toho platí aj

invariantnosť deliaceho pomeru v rovnobežnom premietaní, tak platia aj rovnosti: $(A_1C_1M_1) = (ACM)$ a $(B_1D_1N_1) = (BDN)$. Preto na základe deliaceho pomeru $(ACM) = (\overline{ACM})$ a $(BDN) = (\overline{BDN})$ môžeme zostrojiť body M a N . Rovnobežné premietanie je teda určené priamkou MN .

Ľubovoľný rovinný rez hranolovej plochy 4H rovinou rôznobežnou s priamkou MN (nech je to rovina α) je štvoruholník $A'B'C'D'$. Z invariantnosti deliaceho pomeru v rovnobežnom premietaní platí, že $(A'C'M') = (ACM)$ a $(B'D'N') = (BDN)$. Ale potom (na základe rovností vyššie) platí aj $(A'C'M') = (\overline{ACM})$ a $(B'D'N') = (\overline{BDN})$, čo je nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby štvoruholníky $A'B'C'D'$ a $\overline{ABCD}$ boli afinný. Čím je Veta 2.1 dokázaná.

□

3. Rekonštrukcia pravouhlej súradnicovej sústavy z jej axonometrického priemetu

Úloha: (Dohoda: axonometrický priemet útvaru je dočasne označený prúžkom nad písmenom.)

Nech $\langle \overline{O}; \overline{E}^x, \overline{E}^y, \overline{E}^z \rangle$ je axonometrická súradnicová sústava.

Zostrojte štvorsten $OE^x E^y E^z$ ($OE^x \cong OE^y \cong OE^z$; $OE^x \perp OE^y \perp OE^z \perp OE^x$) a smer premietania l tak, aby štvorhoh $\overline{OE}^x \overline{E}^y \overline{E}^z$ bol rovnobežným priemetom požadovaného štvorstena v smere l do roviny ε .

Ak existuje štvorsten s vyššie spomenutými vlastnosťami, tak úsečky OE^x, OE^y, OE^z sú tri navzájom kolmé polpriemery jednej guľovej plochy G (O ; $r = |OE^x|$). Aby sme mohli zostrojiť požadovaný štvorsten, musíme postupovať nasledovne:

- 1.) zostrojíme axonometrický priemet guľovej plochy G s axonometrickým obrysom $\overline{m}$,
- 2.) zostrojíme guľovú plochu G a osnovu premietania s priemetňou ε tak, aby priemetom guľovej plochy G bol $\overline{m}$ - budeme to riešiť v Mongeovom zobrazení, kde $\varepsilon \parallel \pi$.

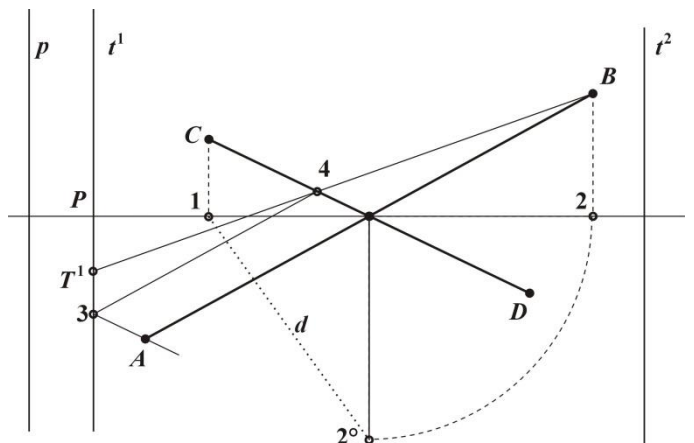
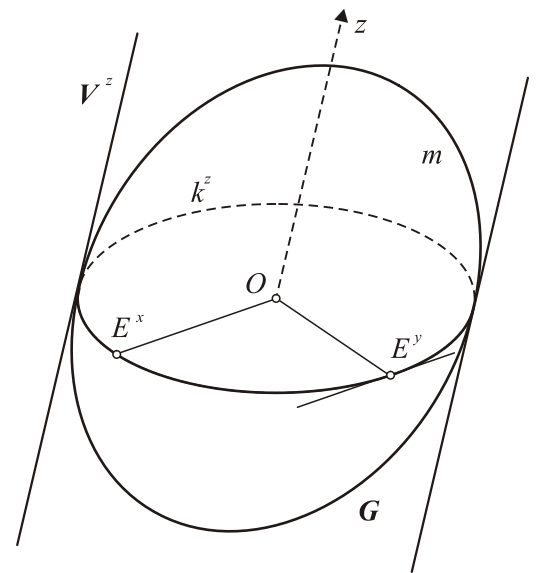
1.) Uvažujme rotačnú valcovú plochu V^z , ktorá má os incidentnú so súradnicovou osou z a dotýka sa guľovej plochy.

Potom $V^z \cap G = \{k^z\}$, kde k^z je kružnica v rovine π , pre ktorú OE^x, OE^y sú navzájom kolmými polpriemermi. Jej axonometrický priemet $\overline{k}^z$ je elipsa so združenými polpriemermi $\overline{OE}^x, \overline{OE}^y$ a keďže $k^z \subset V^z$, orbysom axonometrického priemetu tejto valcovej plochy sú dotýčnice elipsy $\overline{k}^z$ rovnobežné s axonometrickým priemetom osi V^z , t.j. s priamkou $\overline{z}$. Ale tieto dotýčnice (označme ich ${}^1t^z, {}^2t^z$) sú dotýčnicami aj hľadaného obrysu $\overline{m}$ axonometrického priemetu guľovej plochy G .

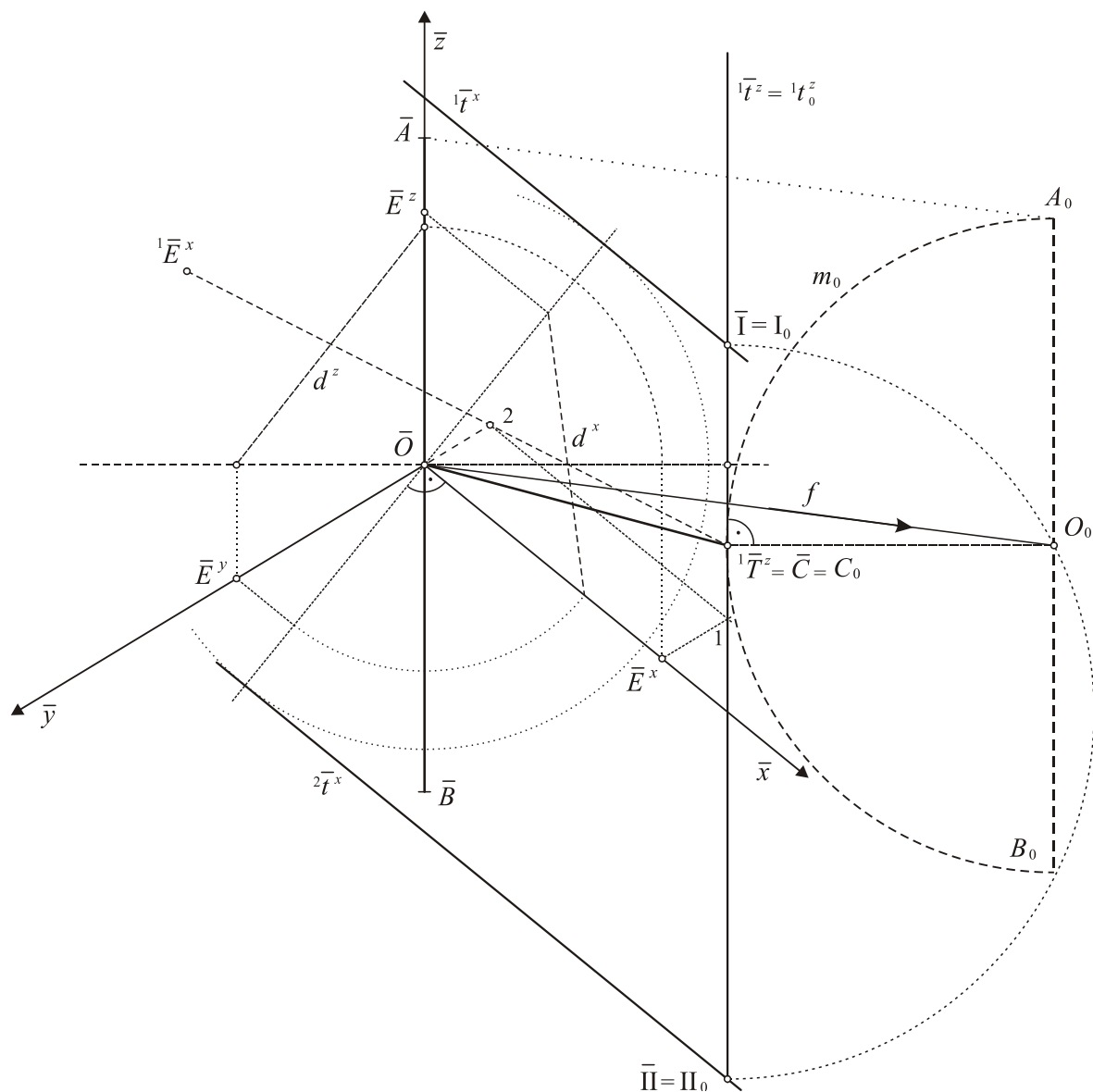
Analogicky možno zostrojiť valcové plochy V^x a V^y , dostávame teda tri dvojice dotýčnic obrysu $\overline{m}$ guľovej plochy v axonometrickom premietaní (na obr. nižšie sú zobrazené iba ${}^1\overline{t}^z, {}^1\overline{t}^x, {}^2\overline{t}^x$).

Konštrukcia dotýčnic k (nenarysovanej) elipse (daná združenými priermi AB, CD), ktoré sú rovnobežné s danou priamkou p :

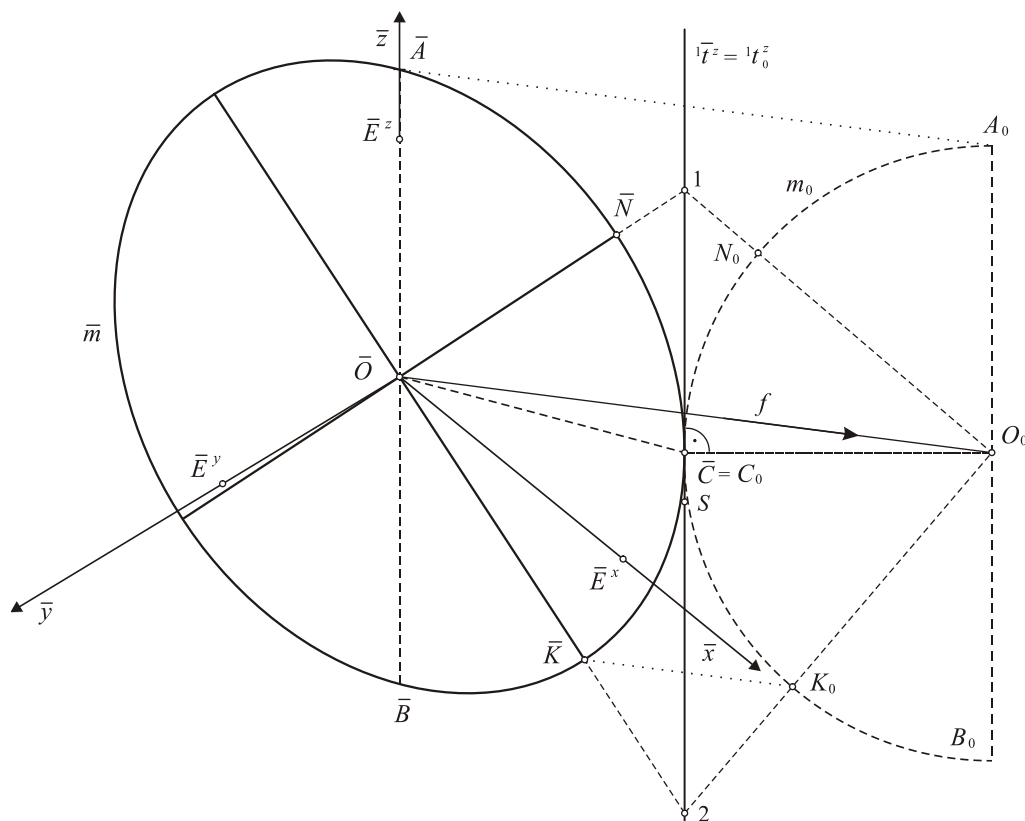
Využijeme, že $12 \perp p$, $C1 \parallel B2 \parallel p$ a $|{}^1tS| = |PS| = d$, pričom $d = |12^0|$. Konštrukcia dotykového bodu dotýčnice 1t resp. 2t je zrejmá z obrázka.



Elipsu $\bar{m}$ zostrojíme použitím vhodnej osovej afinity f , ktorá zobrazí $\bar{m}$ do kružnice m_0 . Os tejto afinity nech je priamka ${}^1\bar{t}^z$. Rovnobežník, vytvorený dotyčnicami ${}^1\bar{t}^z, {}^2\bar{t}^z, {}^1\bar{t}^x, {}^2\bar{t}^x$, opísaný elipse $\bar{m}$ sa v tejto afinitě zobrazí do kosoštvorca opísaného kružnici m_0 . Preto uhlopriečky $\bar{O}\bar{I}, \bar{O}\bar{II}$ rovnobežníka sa zobrazia do navzájom kolmých uhlopriečok kosoštvorca. Ďalej, keďže bod ${}^1\bar{T}^z$ je dotykovým bodom elipsy $\bar{m}$, ktorý leží na osi afinity ${}^1\bar{t}^z$, tento bod je samodružným bodom a aj dotykovým kružnice m_0 . Z týchto vlastností je konštrukcia O_0 a m_0 zrejmalá.

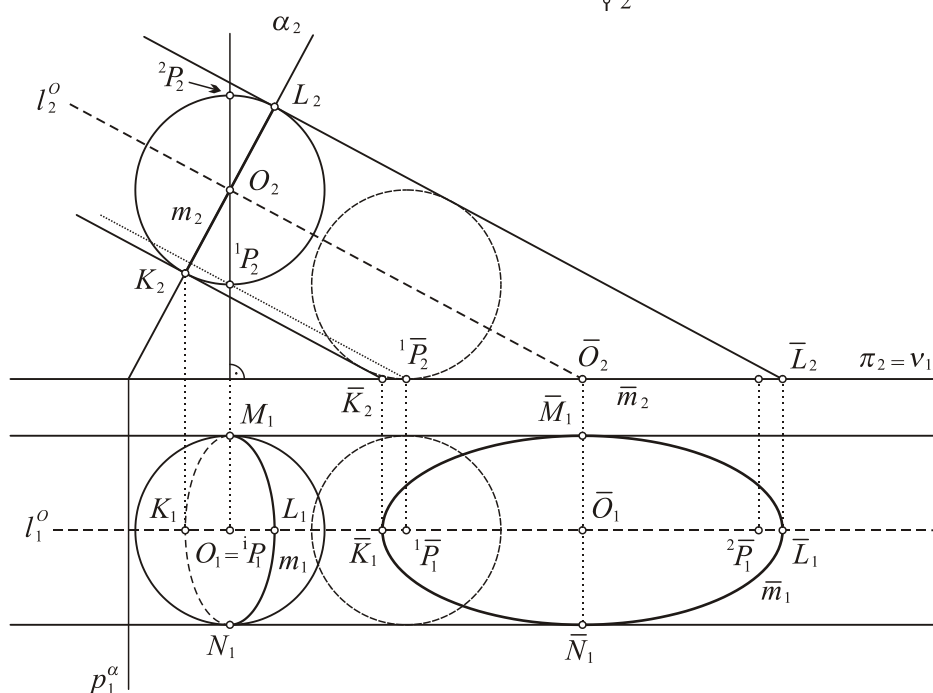


Elipsa $\overline{m}$ je určená so svojimi združenými priermi $\overline{AB}, \overline{CD}$. Na obrázku vpravo je už tá elipsa skonštruovaná a je vyznačená jej hlavná $\overline{KL}$ a vedľajšia $\overline{MN}$ os. Smery týchto osí sme mohli nájsť (okrem možnosti Rytzovej konštrukcie aj) pomocou vlastnosti, že $\angle N_0 O_0 K_0 \cong \angle \overline{N} \overline{O} \overline{K} \cong 90^\circ$, t.j. body 1,2 ležia na kružnici so stredom v bode S (priesečník priamky ${}^1t^z$ a osi úsečky $\overline{OO}_0$) a prechádzajúca bodmi $\overline{O}, O_0$.

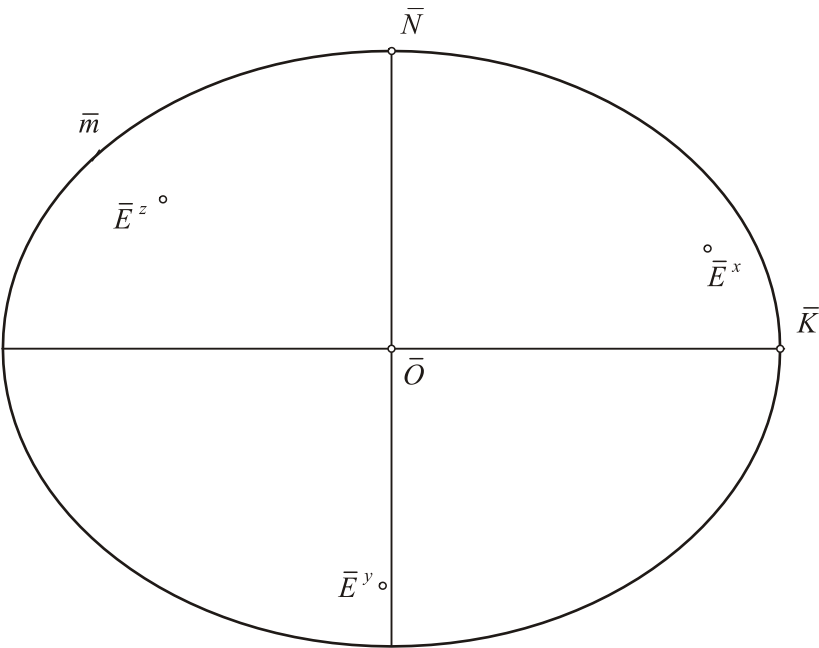


2.) V tejto časti treba zostrojiť v Mongeovom zobrazení guľovú plochu G a smer premietania l , ak máme daný priemet tejto guľovej plochy do roviny $\varepsilon \parallel \pi$, ako aj priemety bodov E^x, E^y, E^z . Platí veta o rovnobežnom priemete guľovej plochy:

Rovnobežným priemetom guľovej plochy je elipsa a jej vnútro alebo kruh. V prípade elipsy sú jej ohniská priemetmi bodov priemeru guľovej plochy, ktorý je kolmý na priemetňu, vedľajšia os elipsy je zhodná s priemerom guľovej plochy.



Nech V je dotyková valcová plocha guľovej plochy, ktorej tvoriace priamky sú rovnobežné s l . Vieme, že $V \cap \varepsilon = \overline{m}$. Nech $\varepsilon \parallel \pi$. Vzhľadom k obrysu priemetu guľovej plochy je nepodstatné, či premietame guľovú plochu do roviny π alebo do roviny s ňou rovnobežnej. Preto si rovinu π zvolíme tak, že guľová plocha dotýka priemetne π . Pravouhlý priemet osi valcovej plochy V do π je incidentná s hlavnou osou elipsy $\overline{m}$, preto si zvolíme priemetňu ν ($\nu \perp \pi$) tak, aby $l \parallel \nu$. Máme teda situáciu zobrazenú na obrázku vyššie. Naša úloha je opačným postupom nájsť obraz guľovej plochy G .



4. Polohové úlohy

Veta 4.1

Medzi axonometrickými priemetmi útvarov roviny a ich axonometrickými pôdorysmi je vzťah osovej afinity, ktorej osou je priemet pôdorysnej stopy danej roviny.

Dôkaz:

f^1 – kolmé premietanie do π , f^2 – rovnobežné premietanie do ε ,

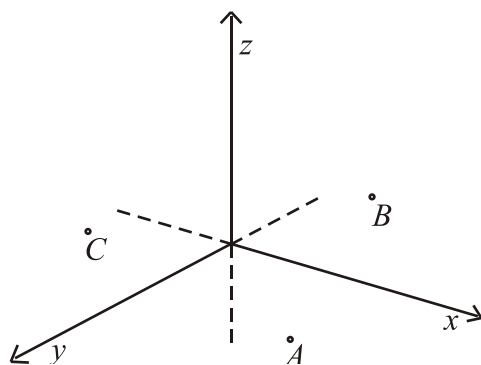
$(\alpha) \xrightarrow{f^1} (\alpha_1)$
 $f^2 \downarrow \quad \downarrow f^2$ teda $f^2(f^1((f^2)^{-1})) : (\alpha_k) \rightarrow (\alpha_{1k})$ je afinné zobrazenie dvoch súmestných rovinných polí.
 $(\alpha_k) \quad (\alpha_{1k})$

Priemet stopy p_k^α je silnosamodružná priamka. ■

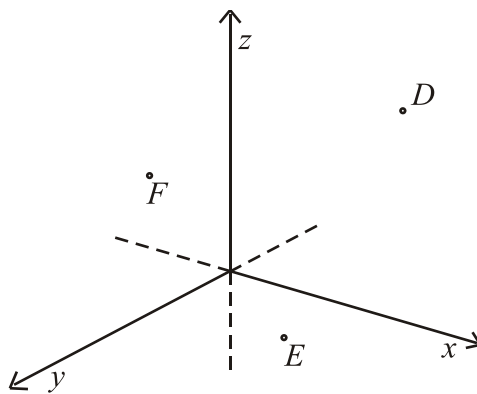
Príklady sú rovnaké ako v pravouhlej axonometrii – na cvičení. Ako prvé dopíšte označenia, ktoré používame pri kosohlej axonometrii.

Príklady:

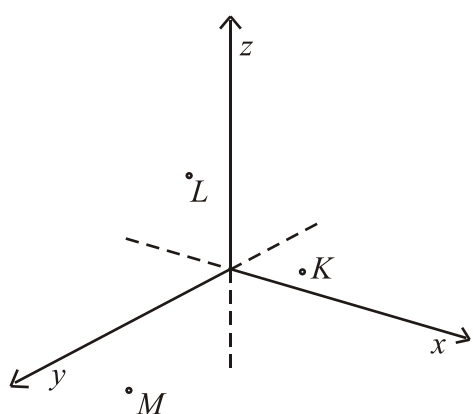
1) Dourčte bod tak, aby: $A, B, C \in \pi$ (obr.1a), $D, E, F \in \nu$ (obr.1b), $K, L, M \in \mu$ (obr.1c).



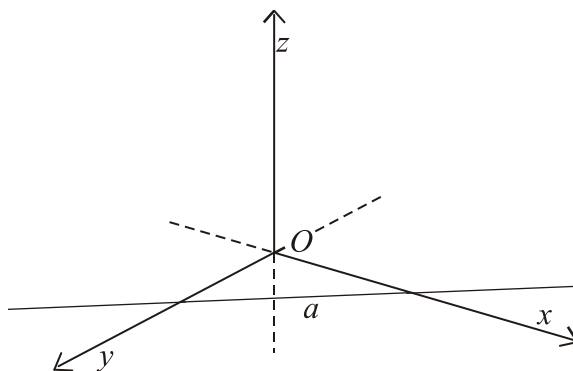
Obr. 1a.



Obr. 1b

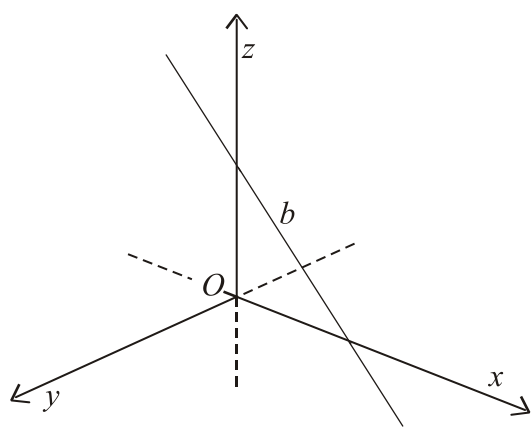


Obr. 1c

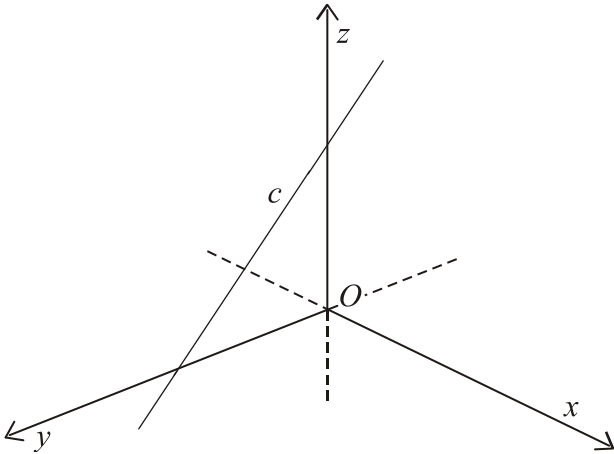


Obr. 2a

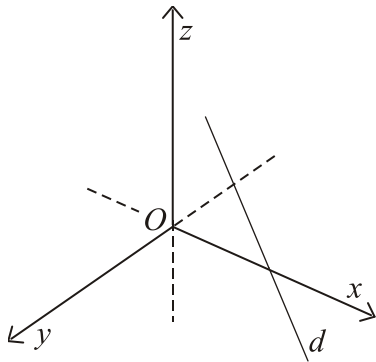
2) Dourčte priamku a jej existujúce stopníky, ak: $a \subset \pi$, $b \subset \nu$, $c \subset \mu$, $d \subset \pi$, $e \subset \nu$, $f \subset \pi$ a $f \parallel y$, $g \subset \nu$ a $g \parallel x$, $h \subset \mu$ a $h \parallel z$ (obr.2a-h). Vyznačte časť priamky, ktorá leží vo viditeľnej časti priestoru s hranicou v rovinách π, ν, μ .



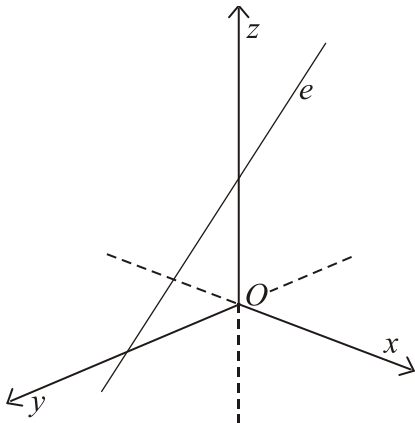
Obr. 2b



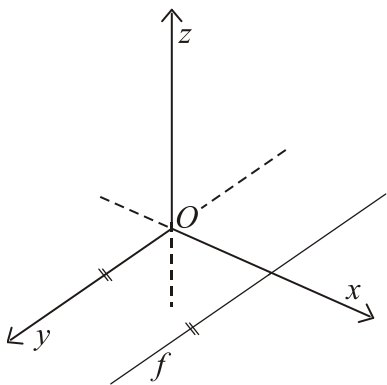
Obr. 2c



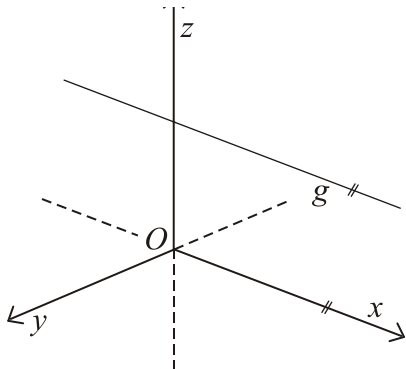
Obr. 2d



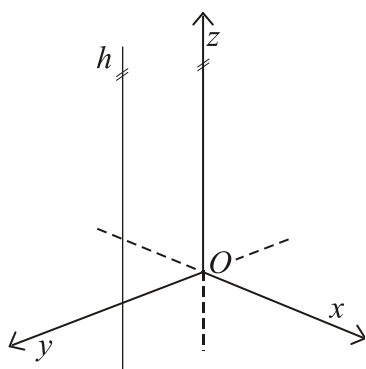
Obr. 2e



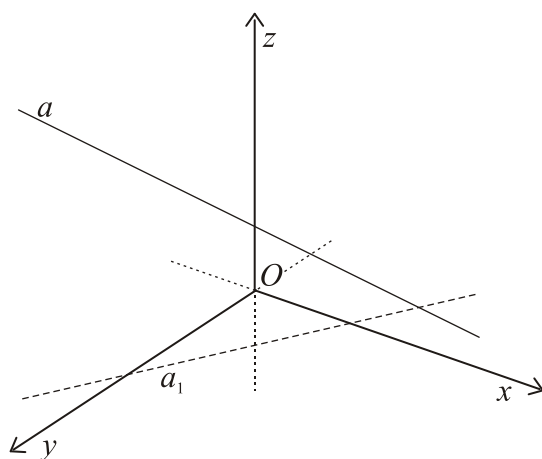
Obr. 2f



Obr. 2g

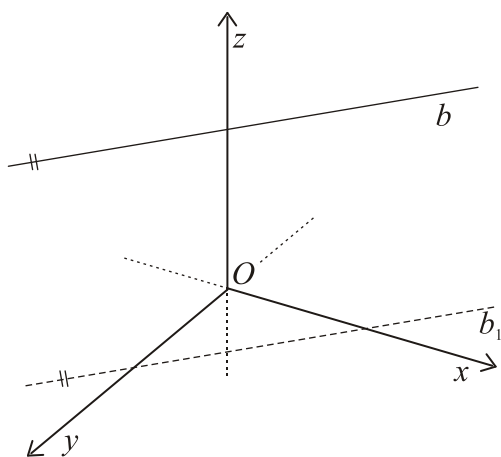


Obr. 2h

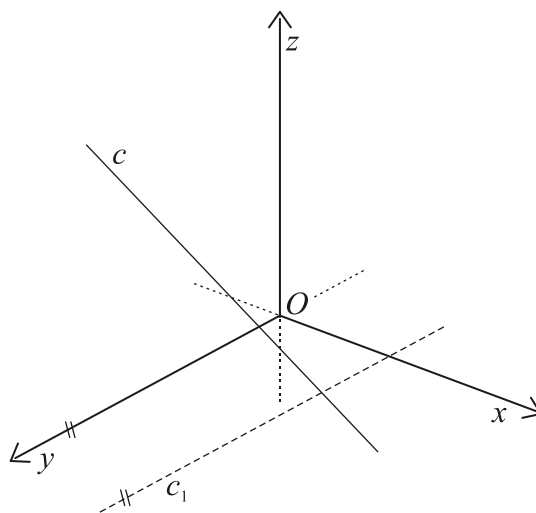


Obr. 3a

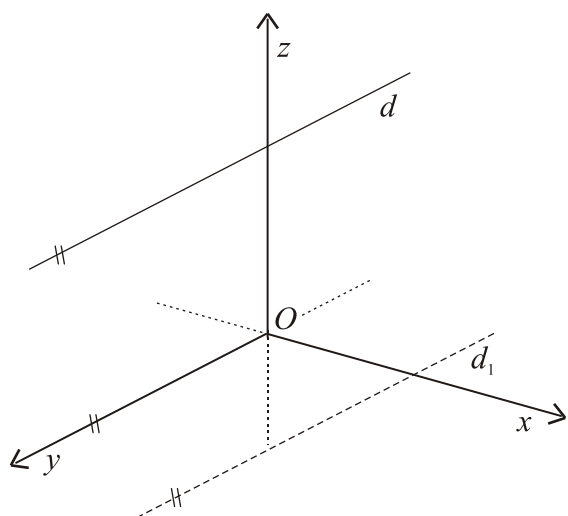
3) Nájdite existujúce stopníky priamky a zostrojte prvú premietáciu roviny priamky (obr.3a-e).



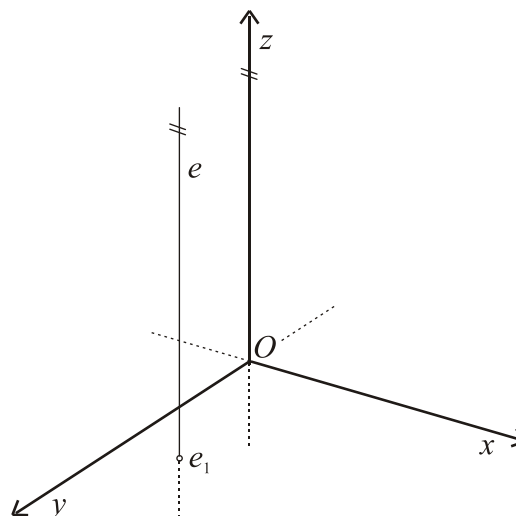
Obr. 3b



Obr. 3c

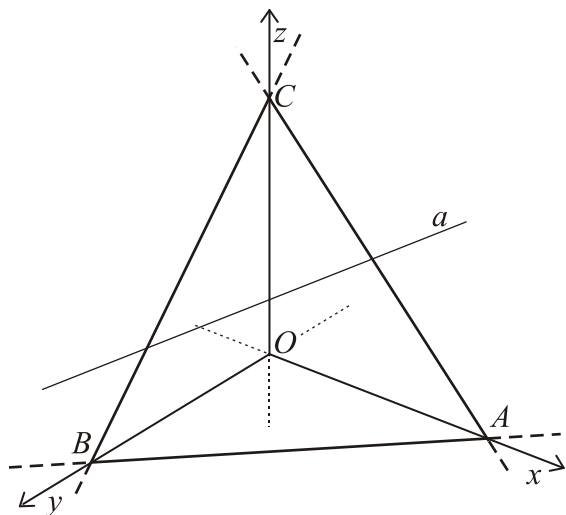


Obr. 3d

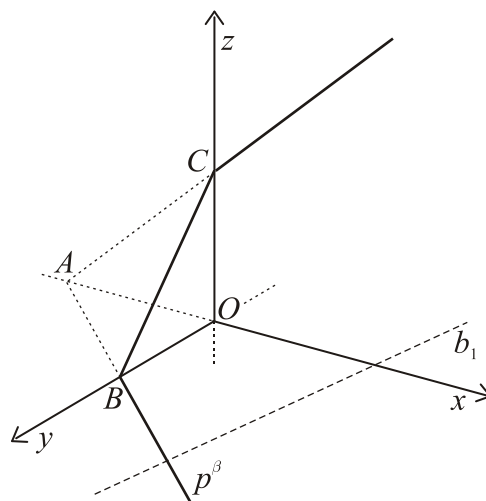


Obr. 3e

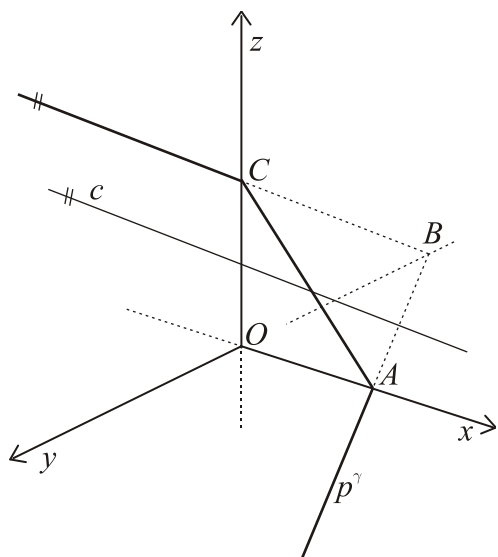
4) Dourčte priamku tak, aby ležala v danej rovine (ktorá je určená buď jej stopami alebo jej tromi bodmi) (obr.4a-g).



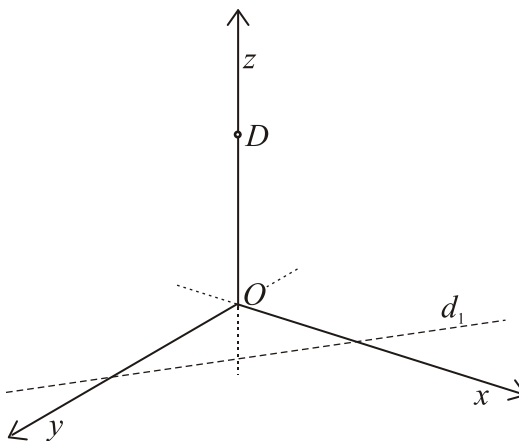
Obr. 4a



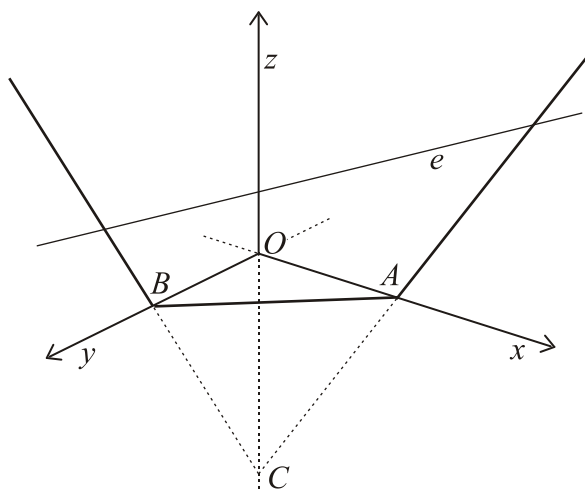
Obr. 4b



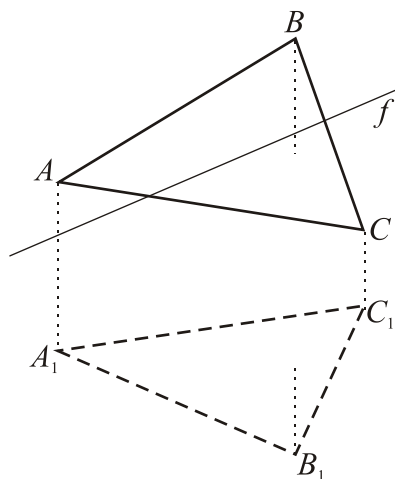
Obr. 4c



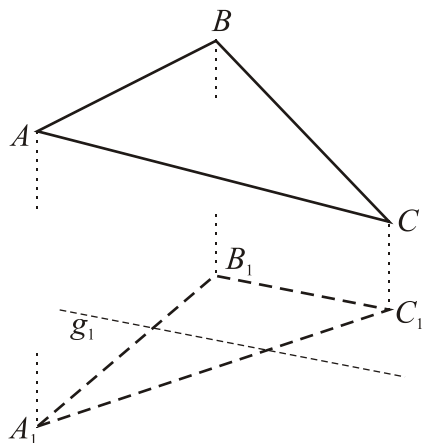
Obr. 4d



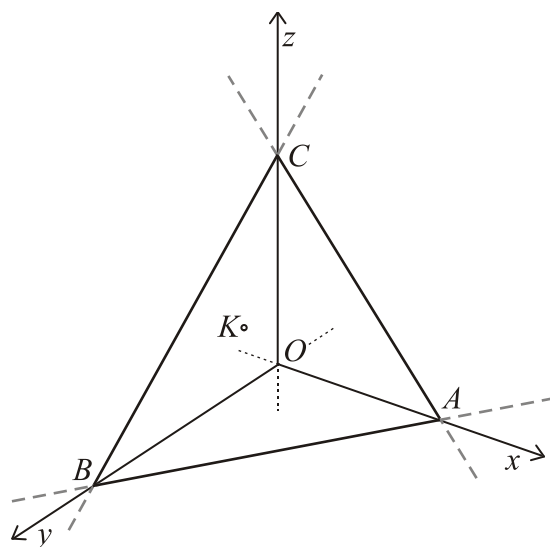
Obr. 4e



Obr. 4f

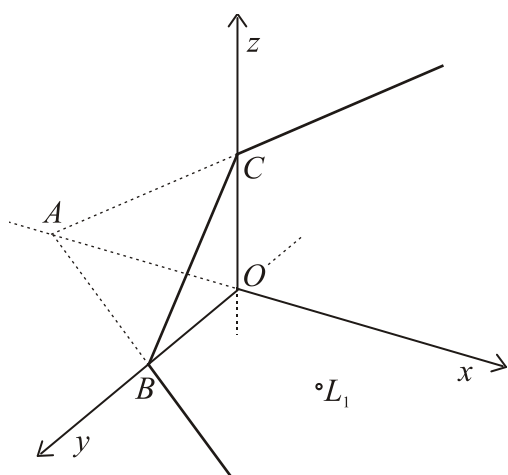


Obr. 4g

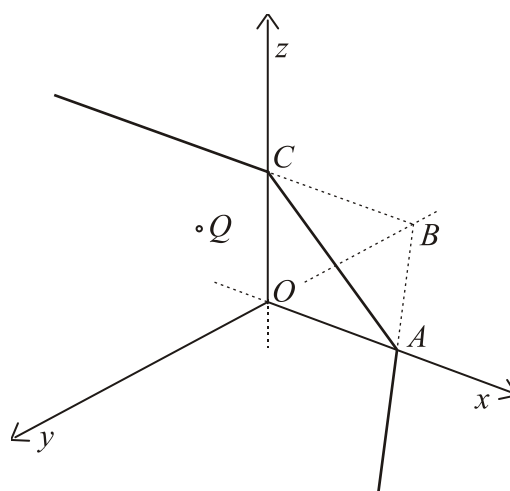


Obr. 5a

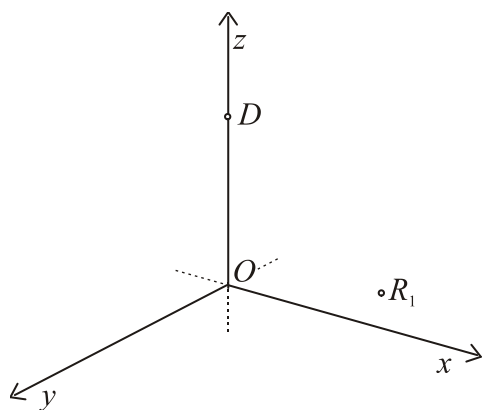
5) Dourčte bod tak, aby ležala v danej rovine (ktorá je určená buď jej stopami alebo jej troma bodmi, pričom v prípade 5d rovina je rovnobežná s π a prechádza bodom D) (obr.5a-e).



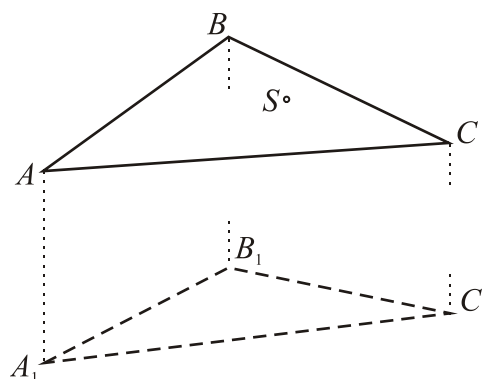
Obr. 5b



Obr. 5c

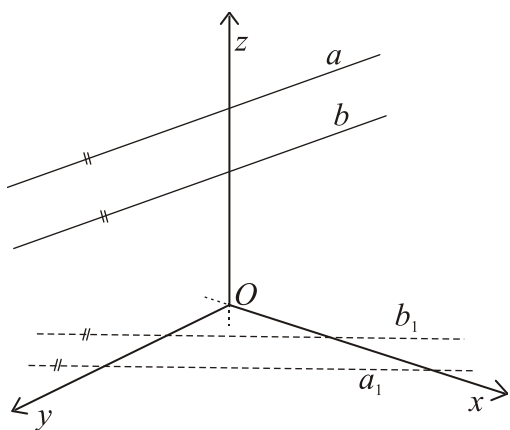


Obr. 5d

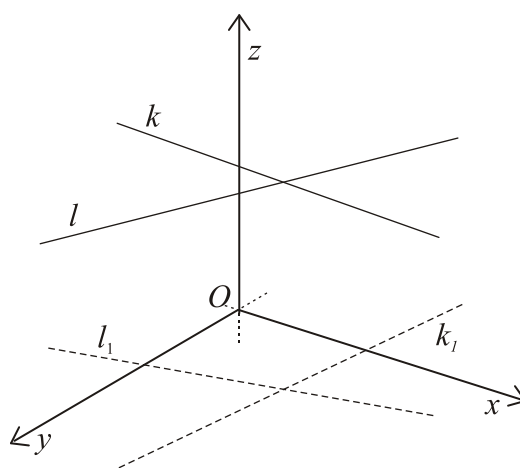


Obr. 5e

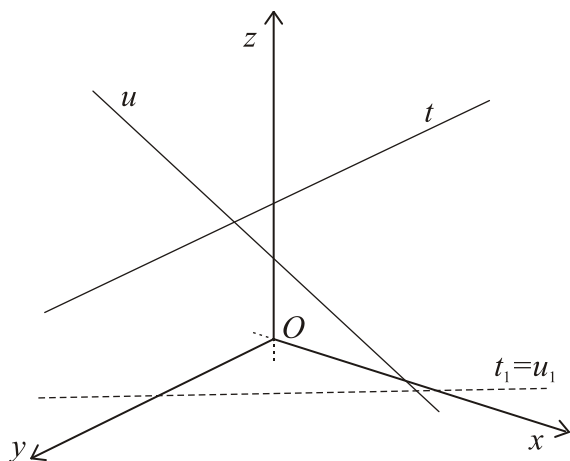
6) Zistite vzájomnú polohu priamok (obr.6a-g).



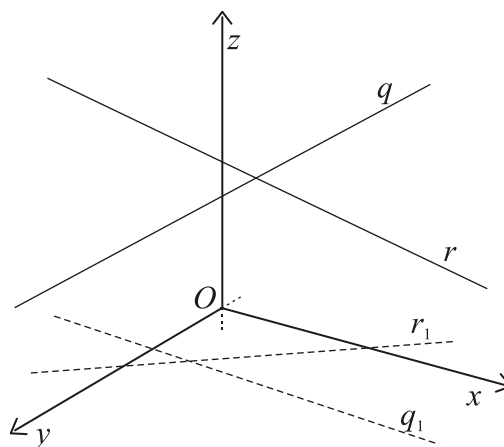
Obr. 6a



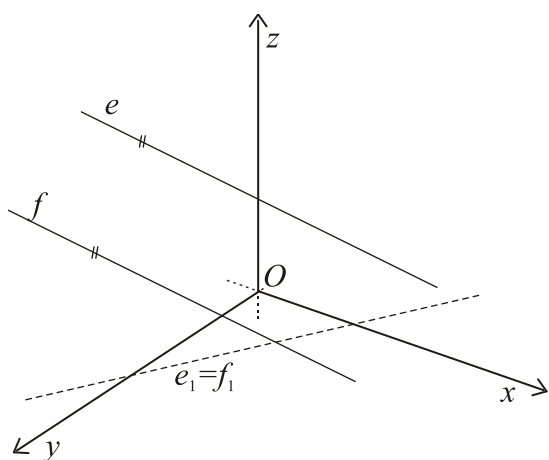
Obr. 6b



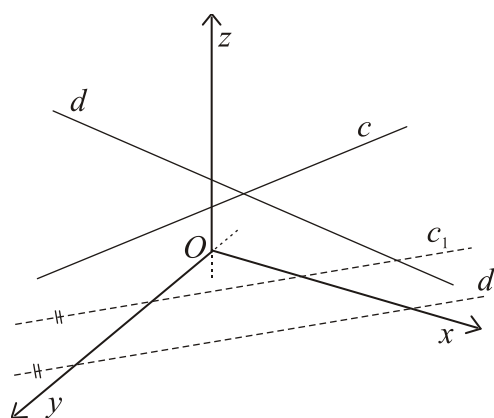
Obr. 6c



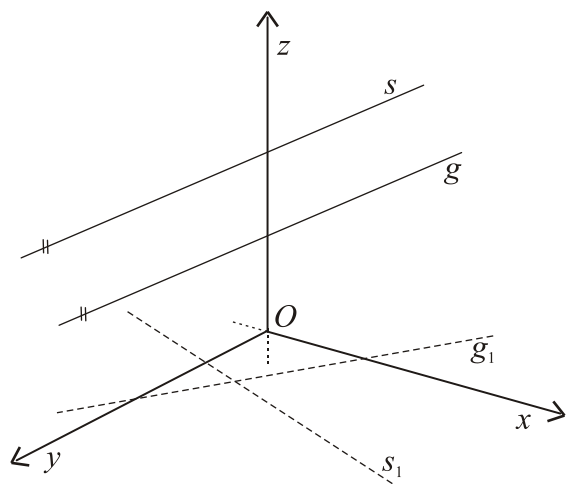
Obr. 6d



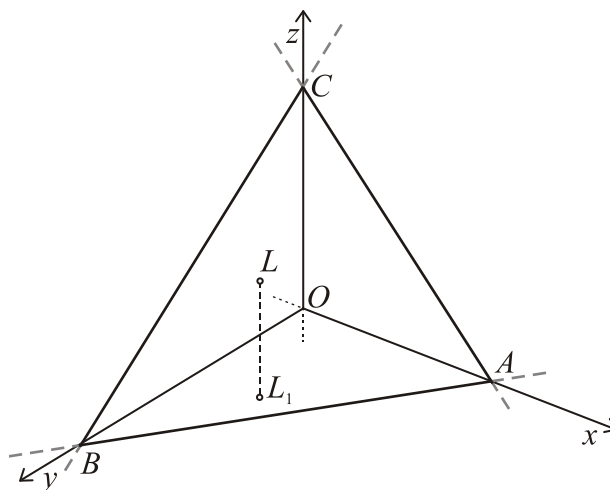
Obr. 6e



Obr. 6f

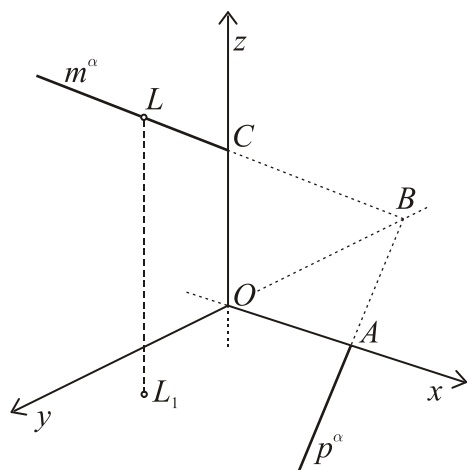


Obr. 6g

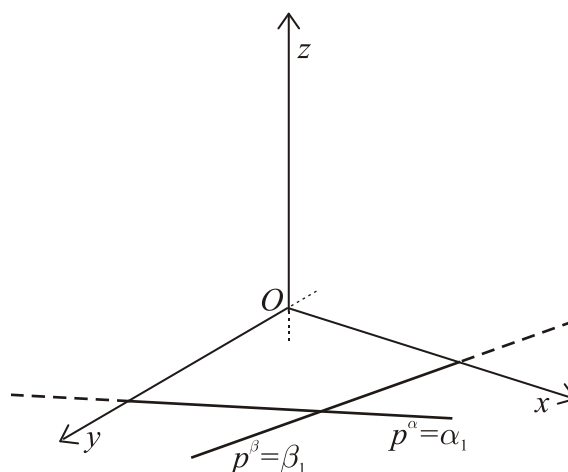


Obr. 7a

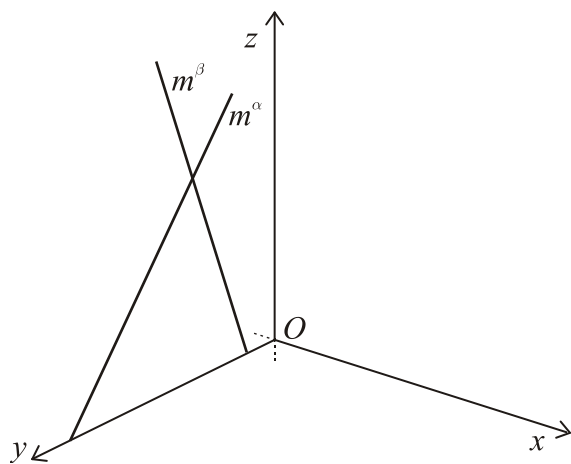
7) Zostrojte rovinu prechádzajúcu bodom L , rovnobežnú s rovinou α (obr. 7a,b). Zistite vzájomnú polohu rovín α a β , ak tieto roviny sú prvé premietacie (obr. 7c) alebo tretie premietacie roviny (obr. 7d). Zistite vzájomnú polohu rovín α a β , ak β je prvá premietacia rovina (obr. 7e).



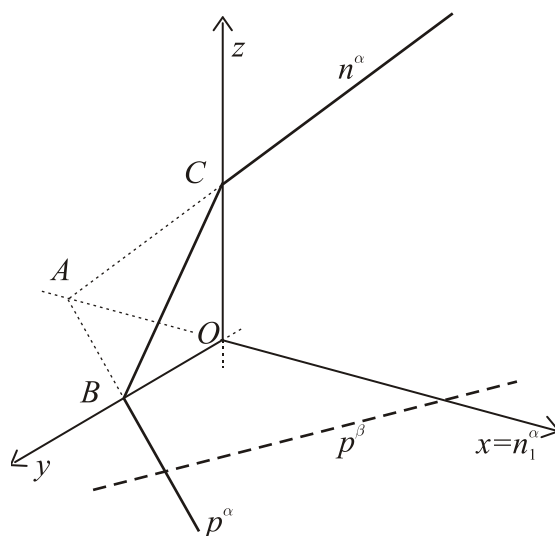
Obr. 7b



Obr. 7c

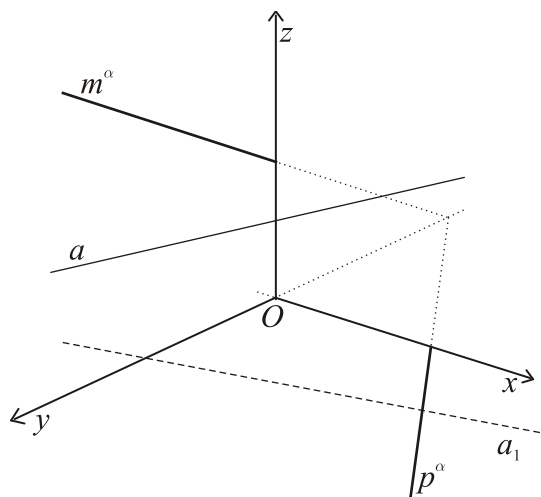


Obr. 7d

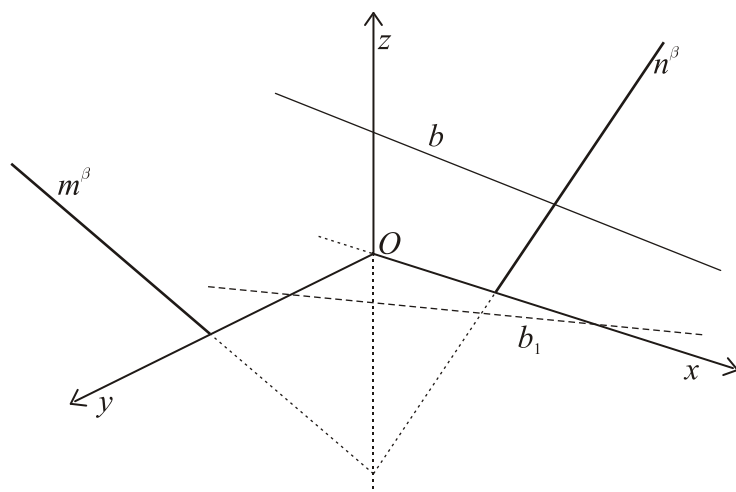


Obr. 7e

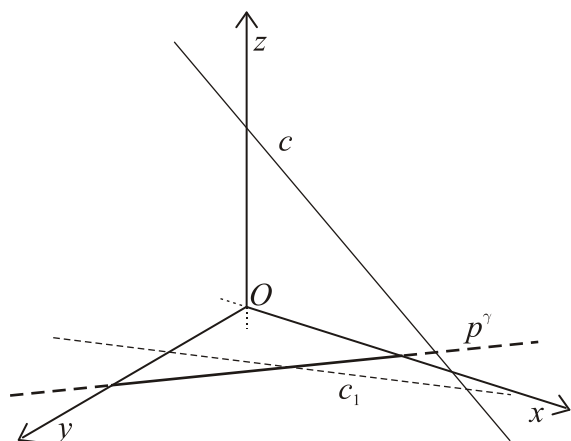
8) Zistite vzájomnú polohu priamky a roviny. Rovina na obr. 8c je prvá premietacia rovina.



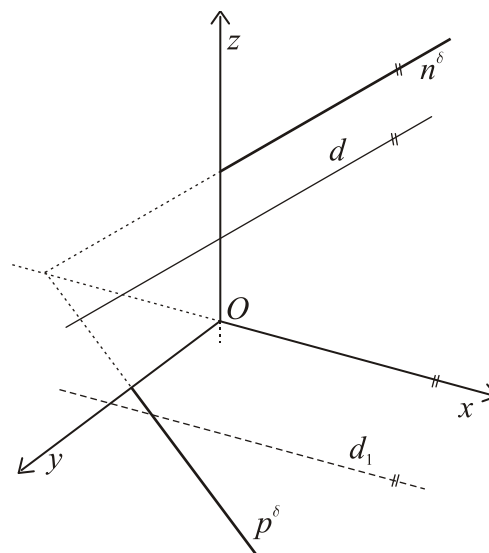
Obr. 8a



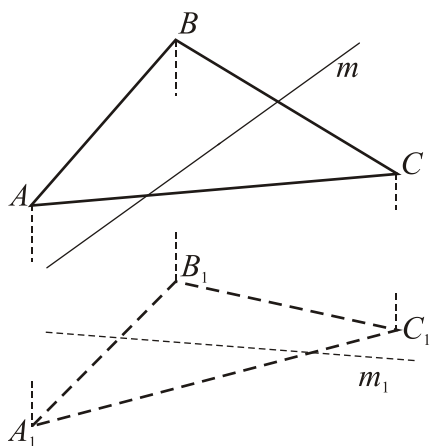
Obr. 8b



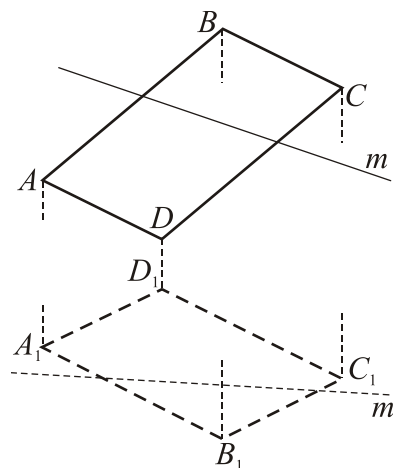
Obr. 8c



Obr. 8d



Obr. 8e



Obr. 8f

5. Metrické úlohy

Riešenie úloh v rovine je založená na vete:

Veta 5.1

Každú afinitu dvoch rovinných polí možno vyjadriť v tvare kompozície podobnosti a osovej afinity (v ľubovoľnom poradí), pričom za os afinity možno vybrať ľubovoľnú priamku príslušného rovinného poľa.

Nech α je ľubovoľná rovina. Potom rovnobežné premietanie $f: (\alpha) \rightarrow (\alpha_k)$ je afinným zobrazením príslušných rovinných polí. Rozložme podľa predchádzajúcej vety: $h: (\alpha) \rightarrow (\bar{\alpha})$ – podobnosť, $g: (\bar{\alpha}) \rightarrow (\alpha_k)$ – vhodná osová afinita v ε , potom $f = g(h)$.

Pre každú rovinu α ($\alpha \nparallel \varepsilon, \alpha \nparallel s$) platí: existuje rovinné pole $(\bar{\alpha})$ tak, že $(\bar{\alpha}) \sim (\alpha)$ a $(\bar{\alpha}) = g(\alpha_k)$, kde g je tá vhodná osová afinita v ε .

Dourčenie afinity g uvidíme osobitne pre nasledujúce prípady roviny α :

- A.) je pomocná priemetňa
- B.) je 1., 2., 3. premietacia rovina (t.j. je kolmá na π, ν, μ)
- C.) má všeobecnú polohu.

!!!Žiadne otáčanie roviny !!! Konštrukcia **podobných** útvarov s originálom, nie zhodných!!!

Kosouhlá axonometria bude daná nasledujúcim spôsobom:

K.A. $(\varphi, \psi; e_k^x, e_k^y, e_k^z)$, kde $\varphi = |\mathcal{A}E_k^x O_k E_k^y|$ a $\psi = |\mathcal{A}E_k^y O_k E_k^z|$

A.) α je pomocná priemetňa, napr. π

1.spôsob:

2.spôsob:

B.) α je 1., 2., 3. premietacia rovina, kolmá na napr. π

K.A. $(120^\circ, 120^\circ; 4.5j, 4j, 3.5j)$, *or* $|O_k X_k| = 2$, *or* $|O_k Y_k| = -1$

C.) α je vo všeobecnej polohe

K.A. $(120^\circ, 120^\circ; 3j, 3.5j, 3j)$, *or* $|O_k X_k| = 5j$, *or* $|O_k Y_k| = 5.5j$, *or* $|O_k Z_k| = 4j$

6. Kolmica na rovinu

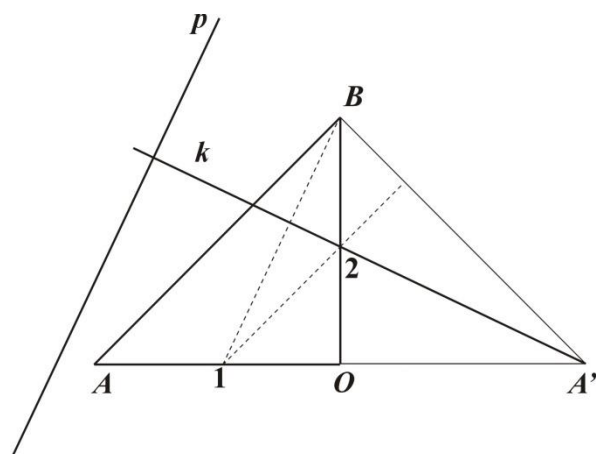
Veta 6.1

Ak poznáme v rovine α ľubovoľný pravouhlý rovnoramenný trojuholník, tak existuje afinná konštrukcia priamky roviny α , ktorá je kolmá na ľubovoľnú zvolenú priamku tejto roviny, invariantná vzhľadom na rovnobežné premietanie.

Dôkaz: konštrukčný-2 spôsoby

Daný je trojuholník $\triangle ABO$, $\angle AOB = 90^\circ$, $|OB| \cong |OA|$ a priamka p .

1.spôsob:



$$1.) A': (AA'O) = -1$$

$$2.) 1: 1 \in \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{B1} \parallel p$$

$$3.) 2: 2 \in \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{12} \parallel AB$$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'2} \perp p$, lebo v trojuholníku $\triangle 1BA'$ je bod 2 ortocentrum

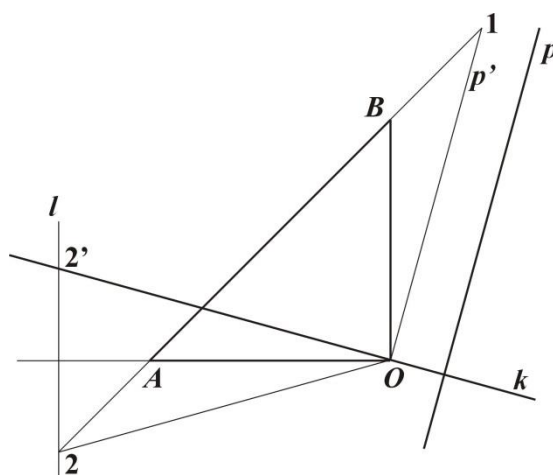
2.spôsob:

$$1.) A': (AA'O) = -1$$

$$2.) 1: 1 \in \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{B1} \parallel p$$

$$3.) 2: 2 \in \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{12} \parallel AB$$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'2} \perp p$, lebo v trojuholníku $\triangle 1BA'$ je bod 2 ortocentrum



Úloha 6.1.

K.A. $(120^\circ, 120^\circ; 3.5j, 5j, 4j)$. Zostrojte kolmicu k na rovinu α prechádzajúcu bodom O , ak $\alpha = \left(\frac{10}{7}e, \frac{3}{5}e, \frac{3}{4}e\right)$.

Veta 6.2

Afinita dvoch rovinných polí $(\bar{\alpha}), (\alpha)$ je podobnosť práve vtedy, ak zachováva aspoň pravé uhly, ktorých ramená nepatria do tých istých osnov priamok.

Na základe toho možno podobnosť $(\bar{\alpha}) \sim (\alpha)$ v prípade roviny vo všeobecnej polohe zostrojiť nasledovne:

K.A. $(120^\circ, 120^\circ; 4j, 3.5j, 5j)$, $or|O_k X_k| = 5j$, $or|O_k Y_k| = 5.5j$, $or|O_k Z_k| = 4j$