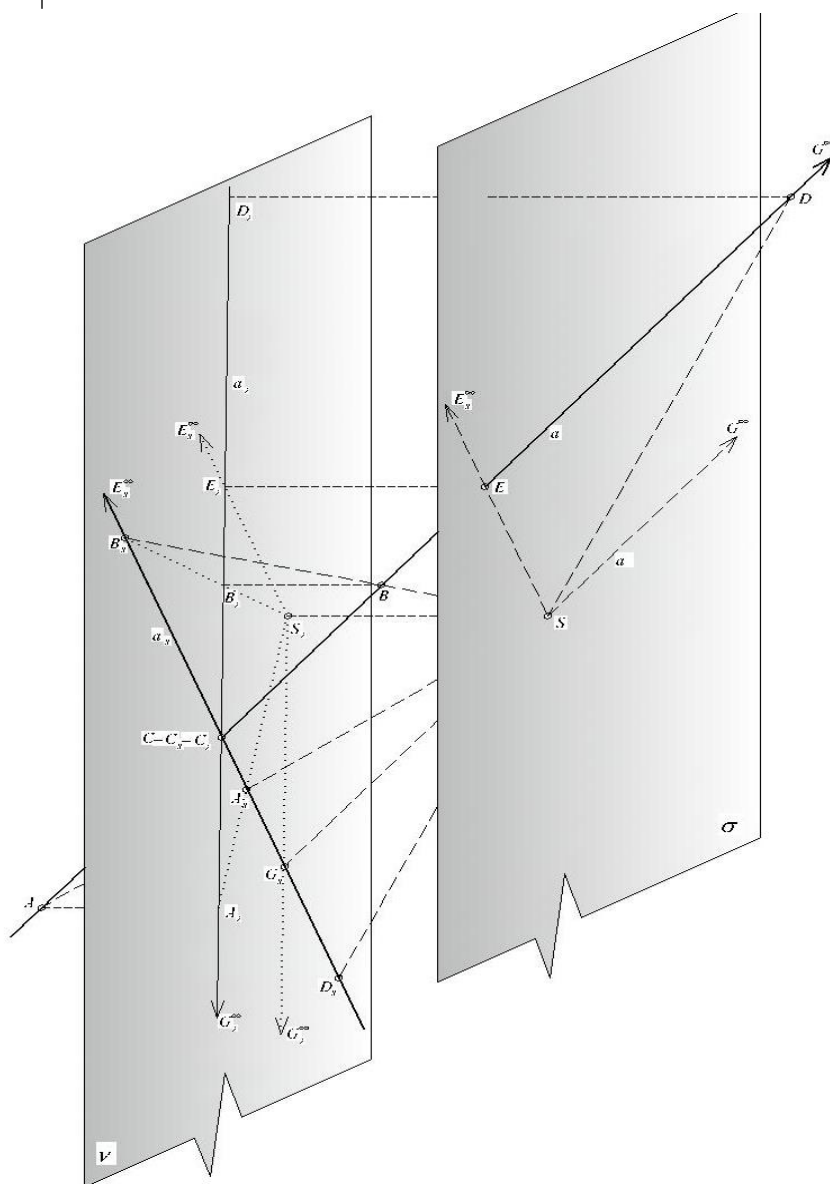


Úloha 1.1: V metóde SP[$S(0,5,4), \nu$] zostrojte stredové priemety bodov $A(-2,-2,-2)$, $B(4,2,3)$, $C(-4,0,9)$, $D(3,7,2)$, $E(-1,5,2)$, $F(0,2,4)$.



Úloha 1.2: V metóde SP[$S(S_2, d), \nu$] zobrazte nevlastný bod priamky $\overrightarrow{AB}$, $A(A_s, A_2)$, $B(B_s, B_2)$

2. Obraz priamky

Stredový priemet priamky je určený stredovým priemetom dvoch rôznych bodov tejto priamky. Uvažujme dva špeciálne body:

Definícia 2.1

- **stopník priamky** $a - P^a = a \cap \nu$
- **úbežník priamky** $a - U^a = a \cap \Omega$ (Ω je nevlastná rovina), U_s^a stredový priemet je vlastným bodom priamky a_s
- **protiúbežník priamky** $a - V^a = a \cap \sigma$
- **protiľahlá rovina** – rovina σ' súmerne združená s rovinou σ podľa priemetne ν

Každá priamka v priestore bude určená usporiadanou dvojicou $a = (P^a, U_s^a)$. Pomocou toho budú už aj body priamky $\vec{l}^S$ určené, a to so svojim stredovým priemetom a obrazom ľubovoľnej priamky, ktorá týmto bodom prechádza.

Možnosti, ktoré môžu nastať:

- a) $a \not\parallel \nu \wedge S \notin a \Rightarrow P^a, U_s^a$ sú dva rôzne vlastné body
- b) $b \not\parallel \nu \wedge S \in b \Rightarrow P^b = U_s^b = b_s$ je vlastný bod
- c) $c \parallel \nu \wedge c \not\subset \nu \Rightarrow P^c = U_s^c = c_s$ je nevlastný bod,
v takom prípade priamka bude daná zvyčajne pomocou
ľubovoľnej roviny, v ktorej leží
- d) $d \subset \nu \Rightarrow P^d$ je ľubovoľný bod priamky d_s a
 $U_s^d = U^d$ jej nevlastný bod

Platí:

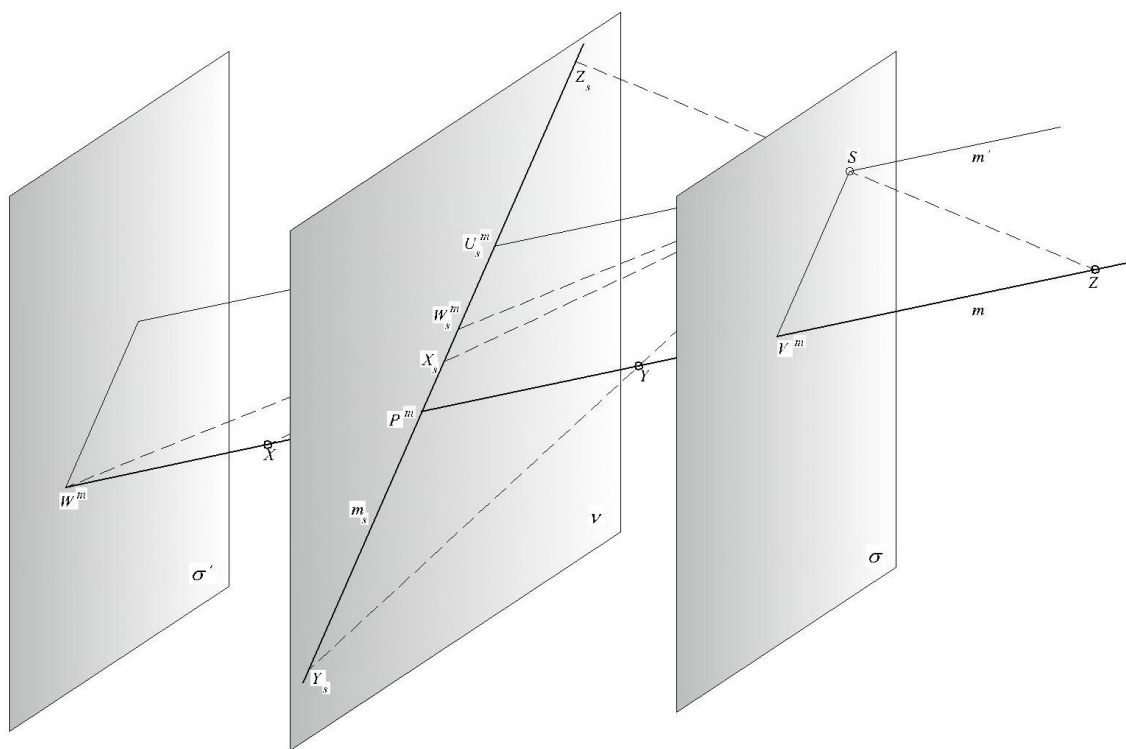
Orientované vzdialenosti: $|P^m U_s^m| = |V^m S|$ a $|V^m P^m| = |S U_s^m|$

Ak označíme $\{W^m\} = \sigma' \cap m$, tak pre W^m platí $(U_s^m P^m W_s^m) = -1$

Ak X_s je vnútorným bodom úsečky $P^m U_s^m$, tak je stredovým priemetom bodu „za“ priemetňou ν

Ak Y_s leží na tej polpriamke so začiatkom P^m , ktorý neobsahuje bod U_s^m , tak je stredovým priemetom bodu „medzi“ priemetňou ν a dištančnou rovinou σ

Ak Z_s leží na tej polpriamke so začiatkom U_s^m , ktorý neobsahuje bod P^m , tak je stredovým priemetom bodu „pred“ dištančnou rovinou σ

**Platí:**

$$|S_2 U_s^m| = d \cdot \cotg \varphi,$$

kde $\varphi = \angle mv$

Dôsledok:

Množina úbežníkov všetkých priamok s odchýlkou $|\varphi|$ je kružnica priemetne so stredom v hlavnom bode a polomerom $d \cdot \cotg|\varphi|$.

Úloha 2.1: V metóde SP[$S(S_2, d), \nu$] je daná priamka $m = (P^m, U_s^m)$. Určte uhol zhodný s uhlom $\angle mv$ a dĺžku ľubovoľnej úsečky $AB \subset m$.

3. Obraz roviny

Definícia 3.1

- **úbežnica roviny** $\alpha - u^\alpha = \alpha \cap \Omega$ (Ω je nevlastná rovina), u_s^α stredový priemet je vlastnou priamkou
- **protiúbežnica roviny** $\alpha - v^\alpha = \alpha \cap \sigma$
- **hlavná priamka roviny** $\alpha - h^\alpha \parallel p^\alpha$
- **hlavný úbežník roviny** $\alpha - U^\alpha$ úbežník spádových priamok roviny α
- **stopa roviny** $\alpha - p^\alpha = \alpha \cap \nu$
- **spádová priamka roviny** $\alpha - s^\alpha \perp p^\alpha$

Veta 3.1

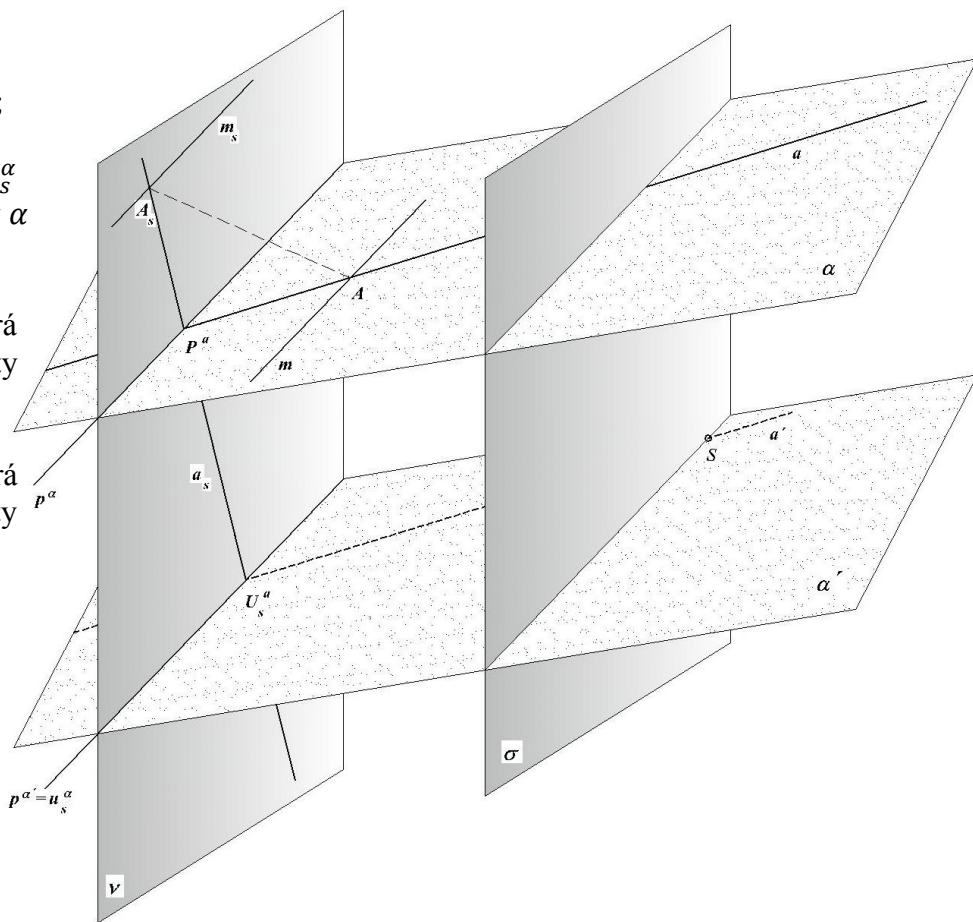
Zobrazenie $f : \alpha \rightarrow (p^\alpha, u_s^\alpha)$ množiny všetkých rovín v E^3 rôznobežných s priemetňou je bijekcia

Pomocou tejto vety môžeme zobraziť ľubovoľnú priamku $m \parallel \nu$ tak, že ňou preložíme ľubovoľnú rovinu α (ktorá nie je rovnobežná s priemetňou). Takú rovinu nazývame **nositeľkou priamky** m .

Označenie: $m = (m_s, p^\alpha, u_s^\alpha)$

Platí:

- orientované vzdialenosti:
 $|Sv^\alpha| = |u_s^\alpha p^\alpha|, |v^\alpha p^\alpha| = |Su_s^\alpha|;$
- body rovinného pásu medzi p^α a u_s^α sú stredové priemety bodov roviny α „za“ priemetňou;
- body polroviny s hranicou p^α , ktorá neobsahuje u_s^α sú stredové priemety bodov roviny α „medzi“ ν a σ ;
- body polroviny s hranicou u_s^α , ktorá neobsahuje p^α sú stredové priemety bodov roviny α „pred“ σ ;
- nech $a = (P^a, U_s^a), b = (P^b, U_s^b),$
 $\alpha = (p^\alpha, u_s^\alpha), \beta = (p^\beta, u_s^\beta) \Rightarrow$
 - 1) $a \parallel b \Leftrightarrow U_s^a = U_s^b$
 - 2) a a b sú rôznobežné $\Leftrightarrow$
 $P^a P^b \parallel U_s^a U_s^b, U_s^a \neq U_s^b$
 - 3) a a b sú mimobežné $\Leftrightarrow$
 $P^a P^b \nparallel U_s^a U_s^b$
 - 4) $a \subset \alpha \Leftrightarrow P^a \in p^\alpha \wedge U_s^a \in u_s^\alpha$
 - 5) $a \parallel \alpha (a \not\subset \alpha) \Leftrightarrow U_s^a \subset u_s^\alpha$
 - 6) $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow u_s^\alpha = u_s^\beta$

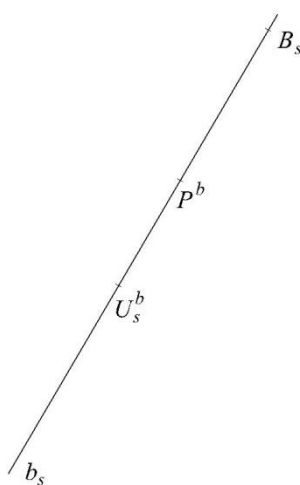
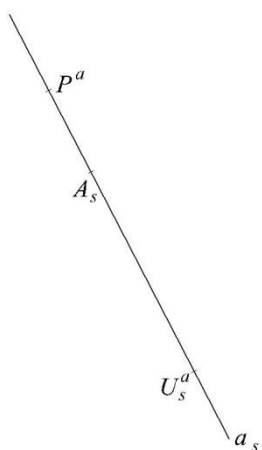


Úloha 3.1: V metóde SP[$S(S_2, d), \nu$] je daná rovina $\alpha = (p^\alpha, u_s^\alpha)$. Zostrojte hlavný úbežník roviny a uhol zhodný s uhlom $\angle \alpha \nu$.

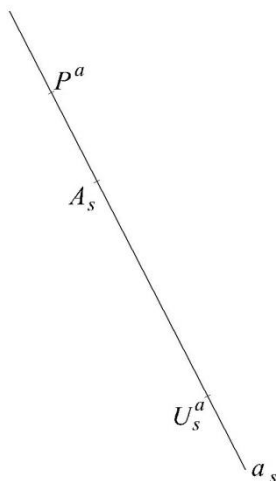
Príklady:

1. Určiť priamku $m = \overleftrightarrow{AB}$, t.j. zostrojiť P^m a U_s^m , ak

a) $A = (A_s, P^a, U_s^a), A \in a, B = (B_s, P^b, U_s^b), B \in b$

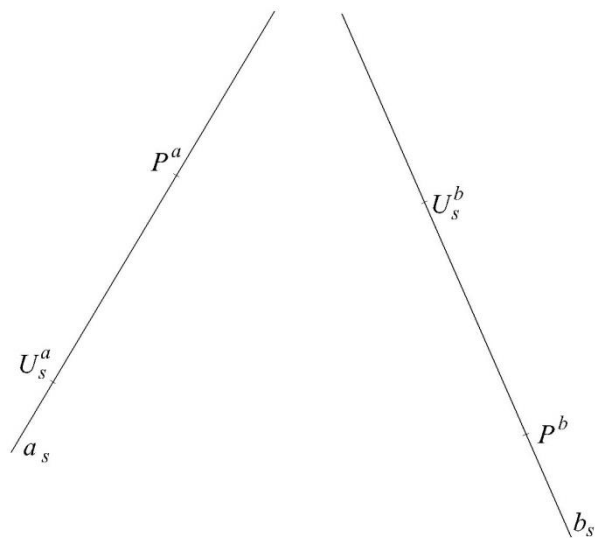


b) $A = (A_s, P^a, U_s^a), A \in a, B = (P^b, U_s^b), B \in b \cap \sigma$



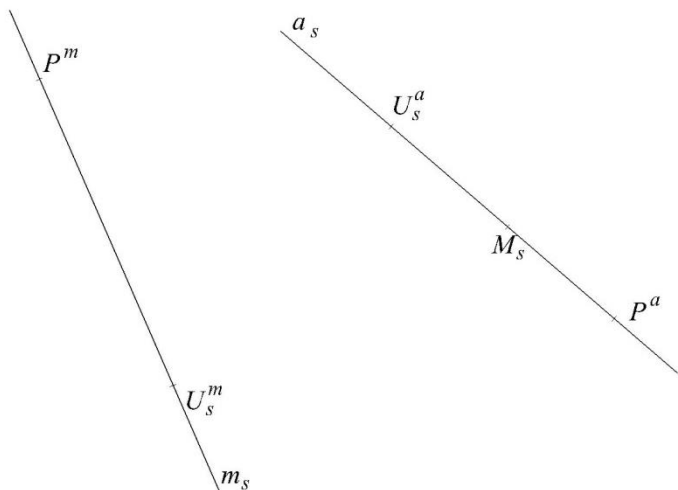
STREDOVÉ PREMIETANIE

c) $A = (P^a, U_s^a), A \in a \cap \sigma, B = (P^b, U_s^b), B \in b \cap \sigma$

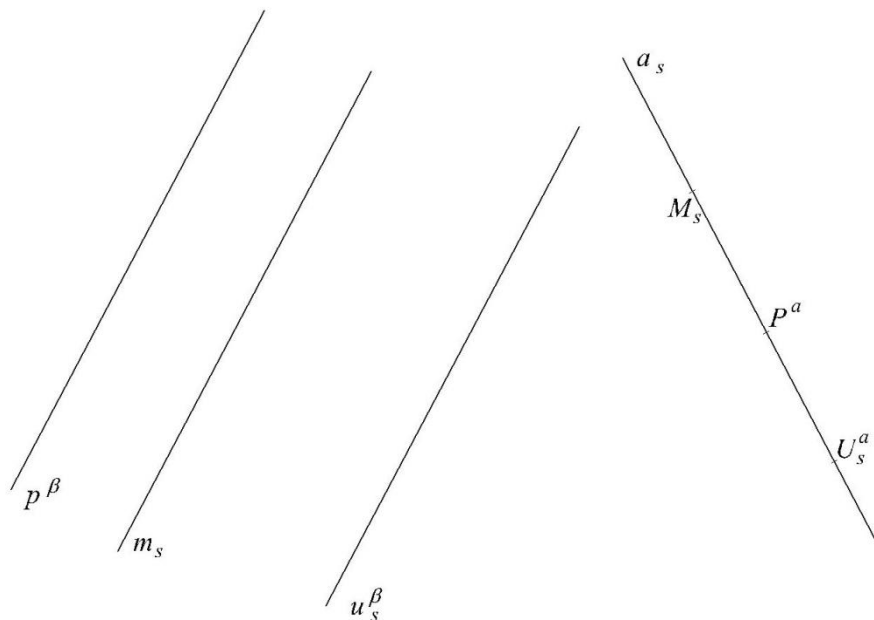


2. Určiť rovinu $\alpha = \overline{Mm}$, t.j. zostrojiť p^α a u_s^α , ak:

a) $M = (M_s, P^a, U_s^a), M \in a, m = (P^m, U_s^m)$

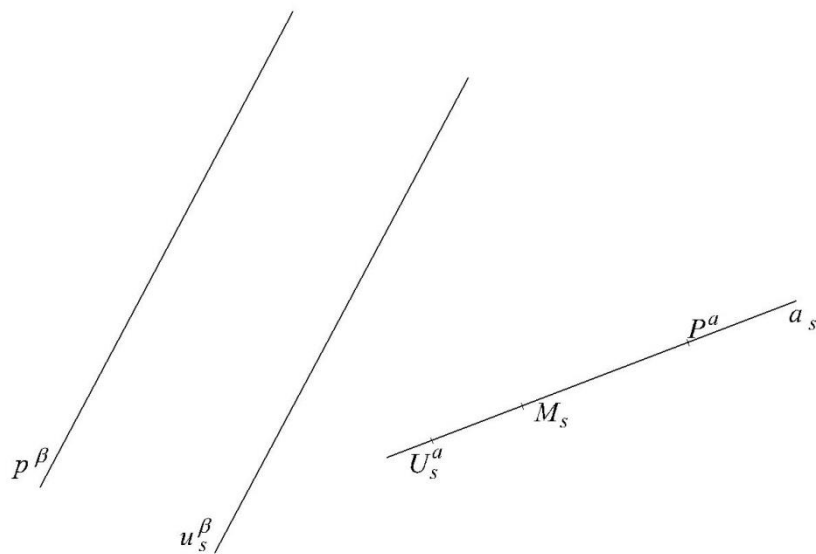


b) $M = (M_s, P^a, U_s^a), M \in a, m = (m_s, p^\beta, u_s^\beta), m \subset \beta \wedge m \parallel v$

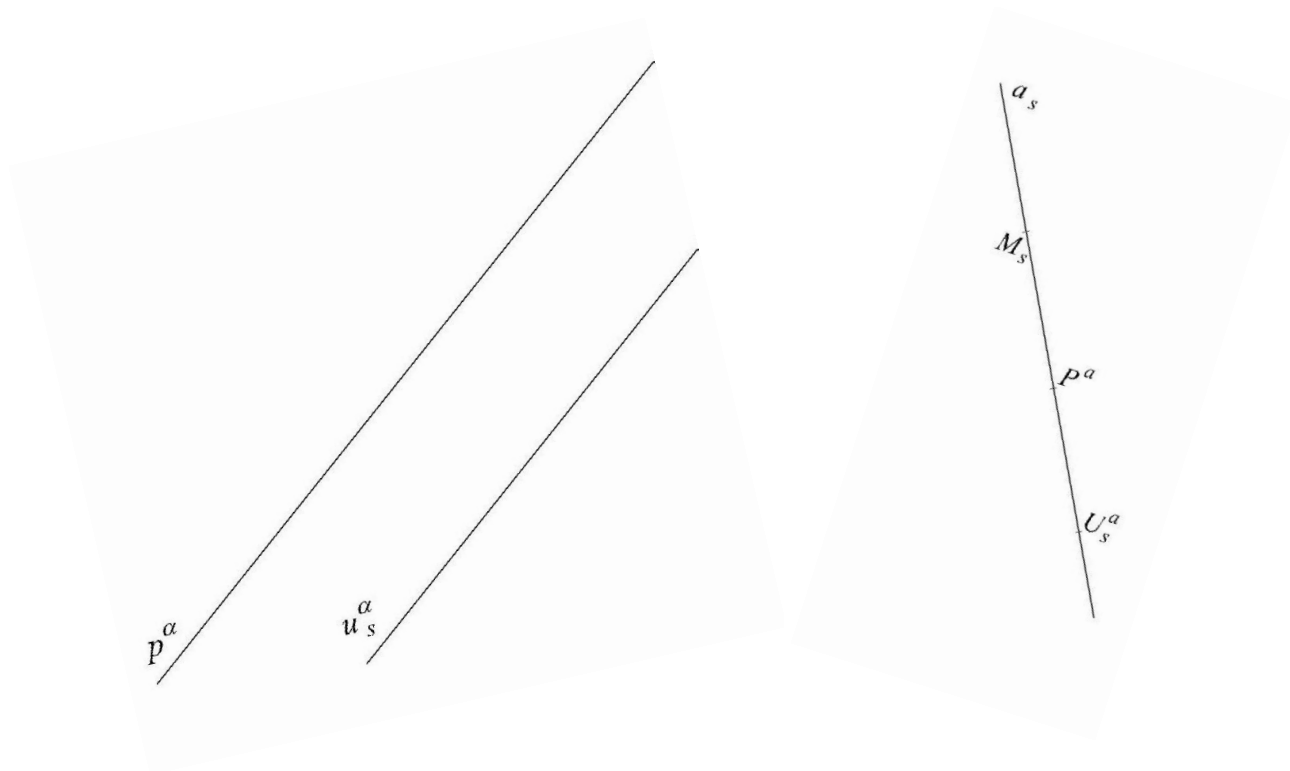


STREDOVÉ PREMIETANIE

c) $M = (M_s, P^a, U_s^a), M \in a, m = (p^\beta, u_s^\beta), m \subset \beta \cap \sigma$



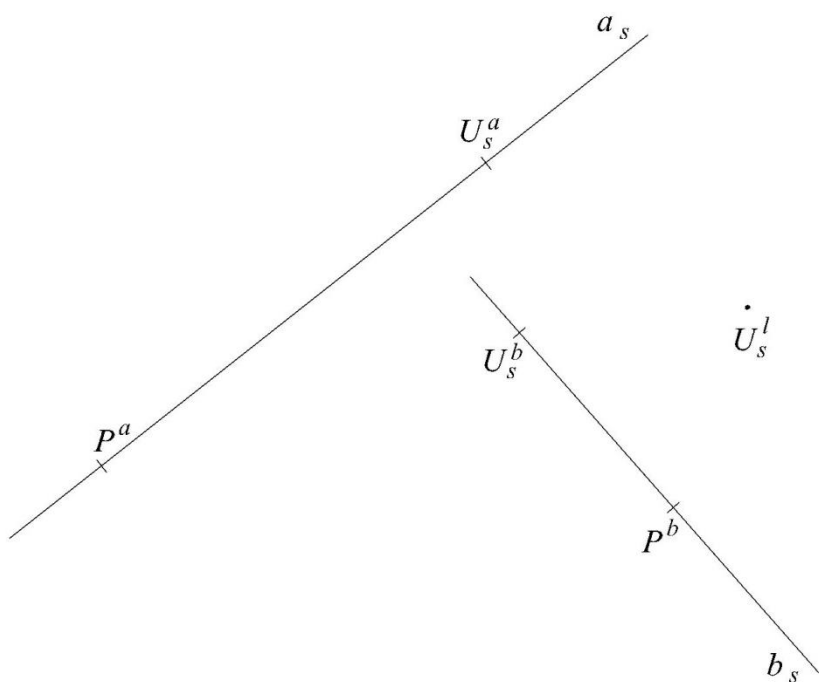
3. Zostrojte priesečnicu roviny α a β , ak $M \in \beta \wedge \beta \parallel \nu$, pričom $M = (M_s, P^a, U_s^a)$ a $\alpha = (p^\alpha, u_s^\alpha)$.



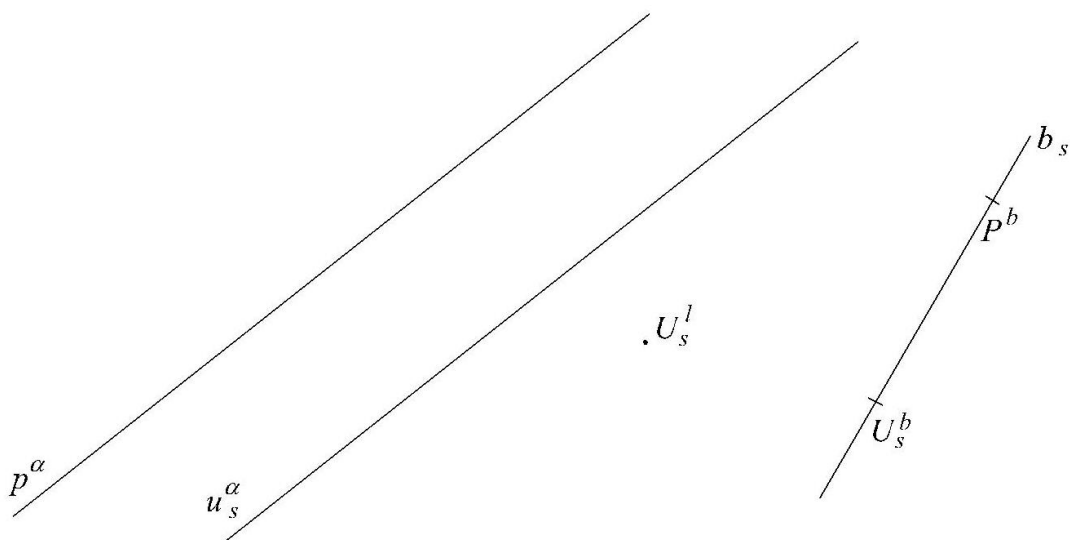
STREDOVÉ PREMIETANIE

4. Zostrojte priechku r mimobežiek a a b , rovnobežnú s priamkou l , ak:

a) $a = (P^a, U_s^a)$, $b = (P^b, U_s^b)$, $l = (? , U_s^l)$



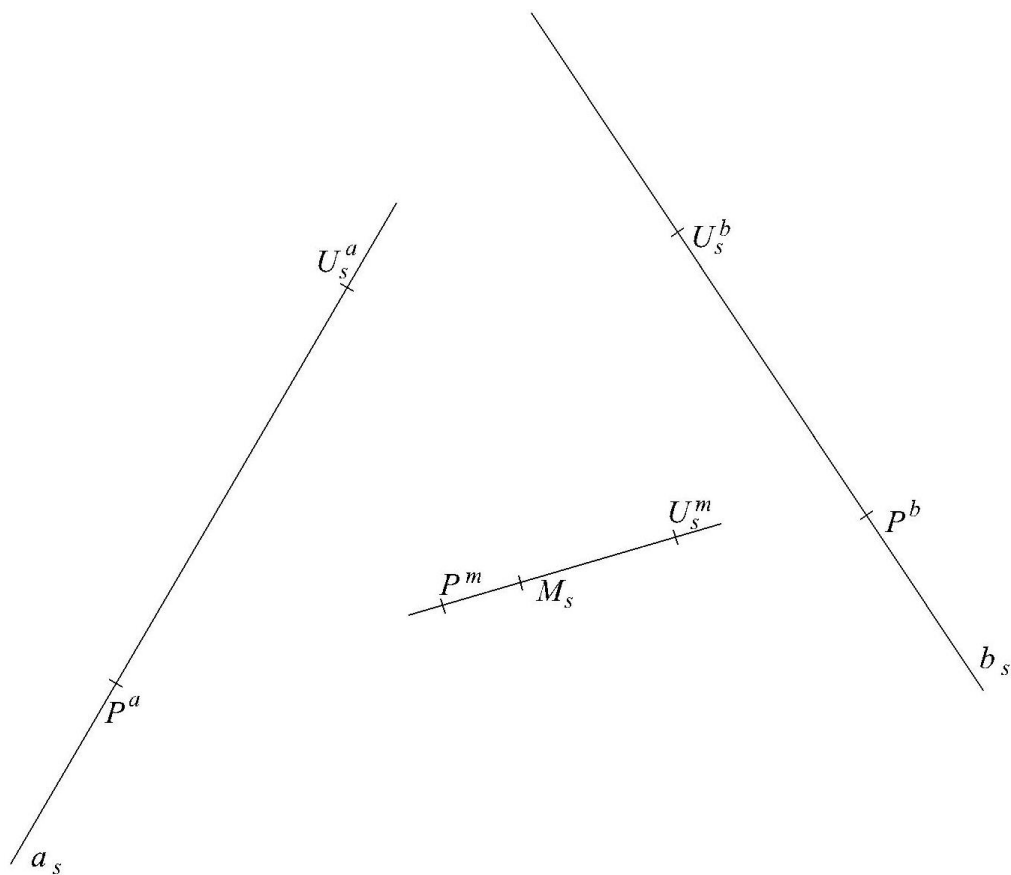
b) $a = (p^\alpha, u_s^\alpha)$, $a \subset \alpha \cap \sigma$, $b = (P^b, U_s^b)$, $l = (? , U_s^l)$



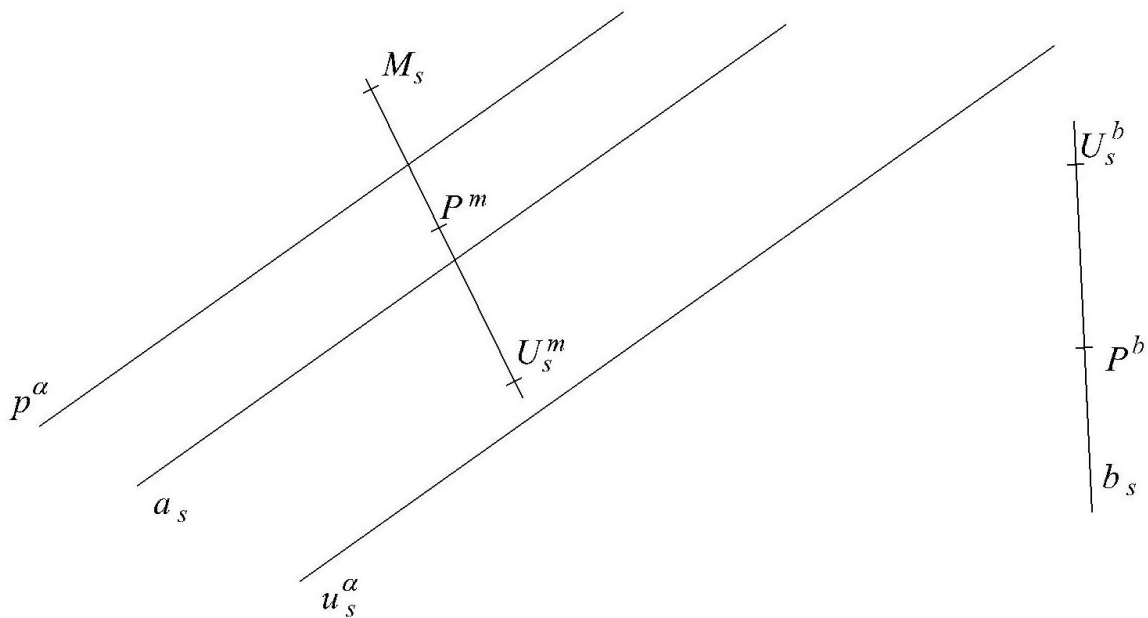
STREDOVÉ PREMIETANIE

5. Zostrojte priechku r mimobežiek a a b , incidentnú s bodom M , ak:

a) $a = (P^a, U_s^a)$, $b = (P^b, U_s^b)$, $M = (M_s, P^m, U_s^m)$, $M \in m$



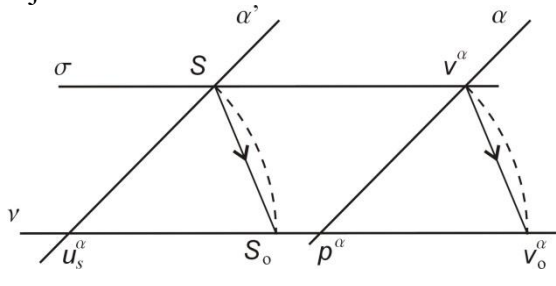
b) $a = (a_s, p^\alpha, u_s^\alpha)$, $a \subset \alpha \wedge a \parallel \nu$, $b = (P^b, U_s^b)$, $M = (M_s, P^m, U_s^m)$, $M \in m$



4. Metrické úlohy

Podobne ako v iných zobrazovacích metódach, aj metrické úlohy v stredovom premietaní sú konštruované pomocou otáčania roviny do priemetne alebo úrovne.

Nech α je ľubovoľná rovina, ktorá nie je incidentná s bodom S a nie je rovnobežná s v . Uvažujme kolmý priemet tejto situácie:



Otočme rovinu α okolo svojej stopy do roviny v . Otočenie roviny do priemetne možno nahradiť rovnobežným premietaním.

Ak h je stredové premietanie $h: (\alpha) \rightarrow (\alpha_s)$ a g rovnobežné premietanie $g: (\alpha) \rightarrow (\alpha_0)$, potom

$$\begin{array}{ccc} (\alpha) & \xrightarrow{h} & (\alpha_s) \\ g \downarrow & \swarrow & \\ (\alpha_0) & & \end{array}$$

a $f = g(h^{-1}): (\alpha_s) \rightarrow (\alpha_0)$ je kompozícia dvoch

stredových premietaní so stredom vo vlastnom bode S a so stredom vo nevlastnom bode. Teda f je homológia s osou $\alpha \cap v = p^\alpha$ a stredom S_0 v priesečníku spojnice oboch stredov premietania s priemetňou. Bod S_0 je otočená poloha bodu S v rovine α' do v okolo u_s^α .

Veta 4.1

Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α ($S \notin \alpha \wedge \alpha \nparallel v$) a otočenými polohami bodov v otáčaní roviny α do priemetne, je vzťah perspektívnej kolineácie, ktorou osou je stopa p^α roviny α , stredom je otočená poloha streda premietania v otáčaní smerovej roviny α' (do priemetne) a jednou úbežnicou je úbežnica roviny u_s^α .

Poznámka: Úbežnicou rovinného pola (α_s) je u_s^α , úbežnicou rovinného pola (α_0) je otočená poloha protiúbežnice v^α . Platí, že orientované vzdialenosti: $|S_0 u_s^\alpha| = |v_0^\alpha p^\alpha|$. Bod S_0 zostrojíme v otočení α' do v okolo u_s^α , t.j. polomer otáčania je $|S u_s^\alpha|$, ktorý možno získať v sklopení kolmopremietacej roviny smerovej priamky s' spádovej priamky.

Úloha 4.1: V metóde $SP[S(S_2, d), v]$ je daná rovina $\alpha = (p^\alpha, u_s^\alpha)$. Zostrojte otočenú polohu ľubovoľného bodu A roviny.

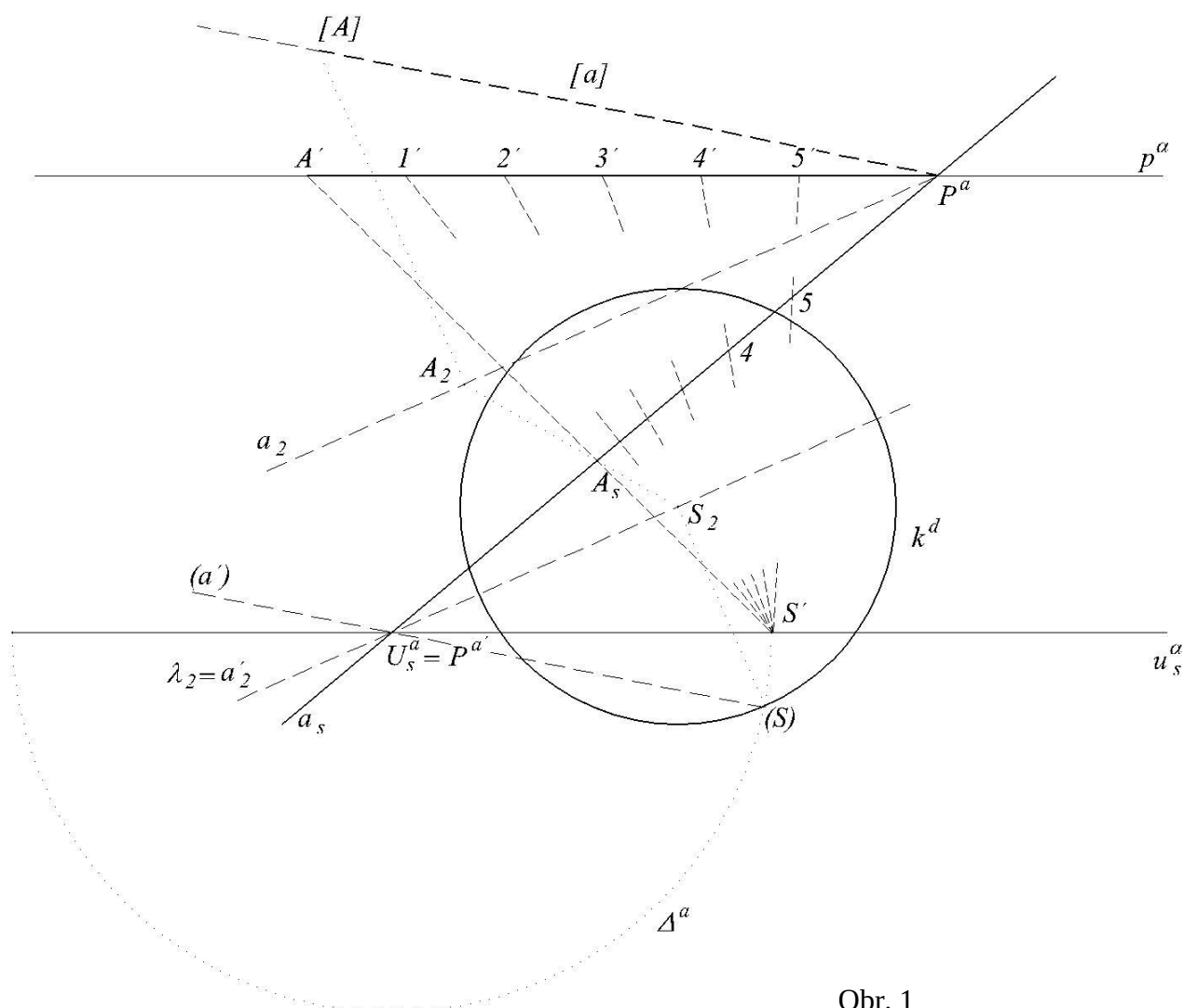
Úloha 4.2: V metóde $SP[S(S_2, d), \nu]$ je daná rovina $\alpha = (p^\alpha, u_s^\alpha)$. Zostrojte priamku kolmú na rovinu α a prechádzajúcu jej ľubovoľným jej bodom $A \in \alpha$. Na kolmici zostrojte bod B tak, aby sa dĺžka úsečky $|AB|$ rovnala $2j$.

Všetky priamky k kolmé na α sú navzájom rovnobežné, preto majú spoločný úbežník U_s^k , je to stopník smerovej priamky k' . Zostrojíme to pomocou sklopenia kolmo premietacej roviny tejto smerovej priamky, čo je súčasne aj kolmo premietacia rovina smerovej priamky spádových priamok roviny.

5. Deliaci bod, deliaca kružnica

Úloha 5.1:

V $SP[S(S_2, d), \nu]$ zistíte vzdialenosť bodu A priamky a od svojho stopníka. Potom naneste na priamku a od bodu A päť jednotiek.



Obr. 1

Na obr.1 je zostrojená vzdialenosť bodov A a P^a dvoma spôsobmi:

1. sklopením kolmo premietacej roviny priamky a , pričom sme využili, že táto rovina je rovnobežná s kolmo premietacou rovinou λ smerovej priamky a' priamky a , teda $|P^a A| = |P^a [A]|$;
2. pomocou tzv. **deliaceho bodu** S' , ktorého konštrukciu vysvetlíme nižšie.

Uvažujme ľubovoľnú rovinu α , incidentnú s priamkou a , teda zostrojíme priemety stopy p^α a úbežnice u_s^α tejto roviny, pričom

$$P^a \in p^\alpha, U_s^a \in u_s^\alpha.$$

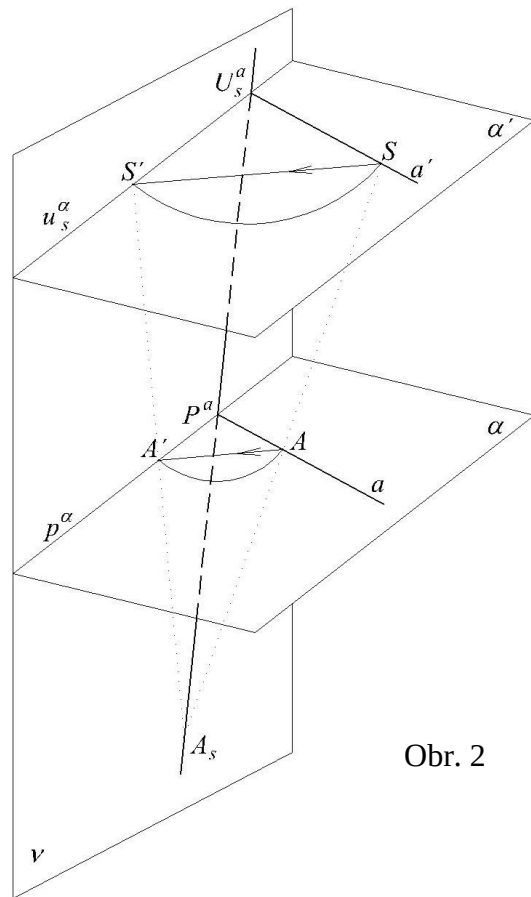
STREDOVÉ PREMIETANIE

V rovine α otočíme priamku a okolo svojho stopníka tak, aby otočená poloha ležala v priemetni ν , t.j. otočíme na priamku p^α . A keďže otočená poloha A' bodu A , leží v priemetni, vzdialenosť $|P^\alpha A| = |P^\alpha A'|$.

Avšak každé otočenie v rovine môžeme previesť na rovnobežné premietanie v tejto rovine, pričom v našom prípade smer premietania je kolmý na niektorú z osí uhla priamok a a p^α .

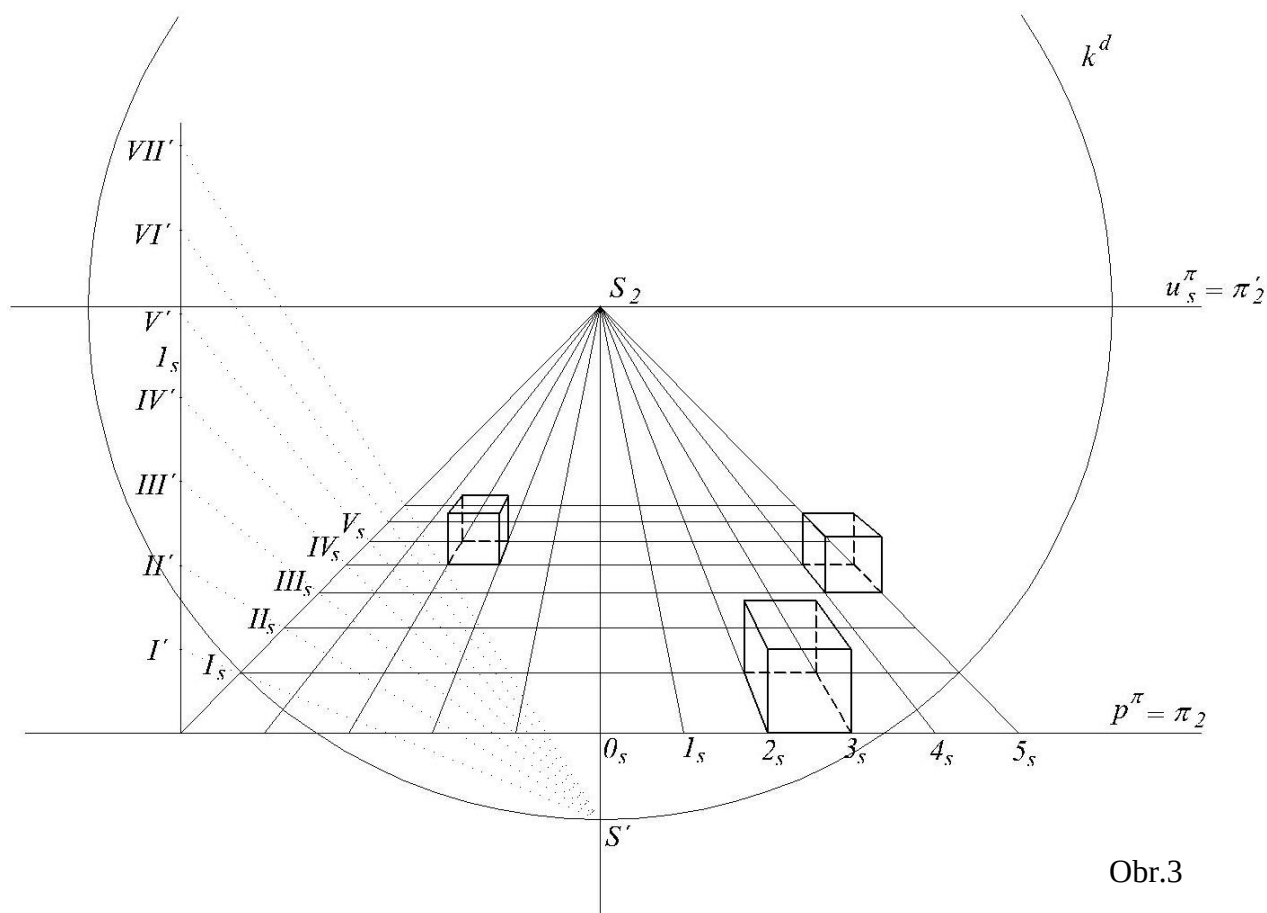
Ku konštrukcii rovnobežných priemetov bodov roviny α v tomto premietaní potrebujeme úbežník smeru premietania, ktorý zostrojíme v smerovej rovine α' roviny α .

Teda $S' \in u_s^\alpha$ a $SS' \parallel AA'$ a platí $|U_s^a S'| = |U_s^a S|$, pričom na obr.1 je táto dĺžka zostrojená pomocou kolmo premietacej roviny λ smerovej priamky a' priamky a . Preto $S' = u_s^\alpha \cap \Delta^a$, kde Δ^a je tzv. **deliaca kružnica** prislúchajúca k priamke a a je to kružnica so stredom v bode U_s^a a polomerom rovnej dĺžky $|U_s^a(S)|$.



Obr. 2

Pomocou deliaceho bodu môžeme zostrojiť aj napr. štvorcovú sieť v rovine π tak, aby strany štvorcov ležali na hlavných a spádových priamkach roviny. Na obr.3 sú ešte zostrojené aj niektoré jednotkové kocky.



Obr.3