

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Domáca úloha 1

Cvičenia boli 20.2., 27.2. a 6.3.2019

Príklad 1 (Opakovanie štatistickej fyziky). Majme systém N spinov s možnými stavmi $\{0, 1\}$ a energiami $\{-\varepsilon, \varepsilon\}$. Definujme magnetizáciu ako $M = n_1 - n_0$.

- Nájdite entropiu a teplotu tohto systému, keď sa na neho pozeráme ako na **mikrokanonický súbor** s energiou E .
 - Za akých podmienok, ak vôbec, môže byť táto teplota záporná?
 - Nájdite magnetizáciu systému M ako funkciu E .
 - Ďalej sa na spiny budeme pozeráť ako na **kanonický súbor** s teplotou T . Nájdite strednú energiu systému \bar{E} a ukážte že výsledok je kompatibilný s mikrokanonickým výsledkom.
 - Vypočítajte strednú magnetizáciu.
 - Vypočítajte entropiu $S = k \log(\Omega(\bar{E}))$.
 - Vypočítajte entropiu z kanonickej partičnej sumy Z .
-

Príklad 2 (Generátor náhodného smeru). Dotiahnite úlohu o generovaní náhodného smeru v troch rozmeroch do konca. To znamená, že máme generátor dvoch rovnomerne rozdelených náhodných čísel ξ, η na intervale $(0, 1)$ a chcete z nich vyrobiť uhly θ, ϕ , ktoré budú reprezentovať rovnomerne rozdelený náhodný smer v troch rozmeroch.

Príklad 3 (Navrhovanie experimentu). Štandardný liek pre chorobu X má účinnosť 63%, čím sa myslí že po podaní lieku sa človek vylieči s pravdepodobnosťou 0.63. Vyvinuli sme nový liek, ktorý má podľa našich predpokladov účinnosť 68%. Naším cieľom je zistiť, koľko ľudí musíme vziať do experimentu, aby sme mali šancu ukázať, že náš nový liek je lepší ako štandardný liek. Experiment vyzerá tak, že zadaný počet n ľudí v teste ich rozdelíme do dvoch rovnako veľkých skupín. Jednej skupine dá prvý liek a druhej skupine druhý liek. Ľudia v skupinách sa podľa uvedených pravdepodobností vyliečia alebo nie. Pre hraničnú hodnotu v pravdepodobnostnom teste zoberte $p = 0.05$, čo znamená hraničnú hodnotu χ^2 rovnú 3.84.¹

- Skúste tento počet najskôr odhadnúť z odhadu fluktuácií v experimente.
- V počítačovom programe spravte program, ktorý vygeneruje náhodný test liekov. Program potom vypočíta pravdepodobnosť, s ktorou je rozdiel medzi oboma skupinami iba štatistická fluktuácia.
- Nechajte program vygenerovať výsledok pre dané n niekoľko krát a porovnajte získané hodnoty p . Číslo n postupne zvyšujte od 10 až kým nebude rozumné očakávať, že experiment dopadne tak, ako by ste chceli.

Tento príklad sa asi najjednoduchšie rieši v Mathematice alebo Exceli.

¹Čo prezradila Mathematica po zadaní `FindRoot[1 - CDF[ChiSquareDistribution[1], x] == 0.05, x, 3]`.

Príklad 4 (Rozdelenia vlastných hodnôt v súboroch náhodných matic). **Bonus.** Na tento príklad budete potrebovať počítačový matematický program, ktorý zvláda veci ako počítanie vlastných hodnôt väčších matic a spracovanie veľkého množstva dát. Napríklad Mathematica.

V príklade budeme používať rôzne pravdepodobnostné rozdelenia. Zvedavosti sa medze nekladú, ale mali by ste skúsiť aspoň niektoré z týchto : ± 1 s rovnakou pravdepodobnosťou, rovnomerné na intervale $(-1, 1)$, $\pm\sqrt[3]{3}$ s rovnakou pravdepodobnosťou, normálne s nulovou strednou hodnotou a $\sigma^2 = 1$, ešte nejaké iné s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou disperziou.

- a. Napíšte program, ktorý pre zadané n vygeneruje symetrickú maticu, ktorej vstupy budú náhodné čísla so zadaným rozdelením pravdepodobnosti.²
- b. Nechajte program vygenerovať veľa takýchto matic (~ 1000) a vykreslite histogram všetkých vlastných hodnôt, ktoré ste takto dosiahli. Sledujte, ako sa mení tento histogram keď zväčšujete veľkosť matice od $n = 2$ po $n = 20$.
- c. Porovnajte rozdiel medzi histogramami vlastných hodnôt pre rôznej pravdepodobnostné rozdelenia vstupov.

²Dobrý nápad je napríklad vygenerovať ľubovoľnú maticu, pripočítať k nej jej transponovanú a vydeliť dvomi.