

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 20.2.2019

náhodné premenné, rozdelenia pravdepodobnosti,
generátory náhodných čísel

Akékoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1 (Pravdepodobnosti 1). Pri ceste pozorujete dopravu, ktorá prechádza okolo. Autobusy okolo vás prechádzajú v pravidelných intervaloch každých 5 minút. Autá okolo vás prechádzajú náhodne, pričom za malý čas dt je pravdepodobnosť že okolo vás prejde auto dt/τ , kde $\tau = 5min$.

- Ukážte, že priemerný počet áut, ktoré okolo vás prejdú za jednu hodinu je 12.
- Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne n autobusov? Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne n áut?
- Aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny Δ_B , ktorá je časom medzi dvomi po sebe idúcimi autobusmi? Aké je rozdelenie tejto veličiny Δ_A pre autá?
- Ak pridáme na cestu v náhodnom čase, aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny δ_B , ktorá meria čas do príchodu najbližšieho autobusu? Aké je rozdelenie tejto veličiny δ_A pre autá?

Príklad 2 (Pravdepodobnosti 2). Klasický harmonický oscilátor s vlastnou frekvenciou ω má energiu E . Na oscilátor sa pozrieme v náhodnom časovom okamihu jeho vývoja. Aké je rozdelenie pravdepodobnosti $\rho(x)$ jeho polohy? T.j. s akou pravdepodobnosťou sa v tomto okamihu nachádza v intervale $(x, x + dx)$?

Príklad 3 (Rozdelenia pravdepodobnosti). Pre nasledujúce rozdelenia pravdepodobnosti jednej náhodnej premennej nájdite normalizačnú konštantu, charakteristickú funkciu, n -tý moment a

varianciu.

$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (0, 1) \quad (1)$$

$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (-1, 1) \quad (2)$$

$$\text{rovnomerné na intervale } (a, b) \quad (3)$$

$$\blacksquare \sim \sqrt{1-x^2} \text{ (polkruhové)} \quad (4)$$

$$\sim e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \text{ (Gauss)} \quad (5)$$

$$\sim x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \text{ (Weibull)} \quad (6)$$

$$\sim \frac{1}{2 + e^x + e^{-x}} \quad (7)$$

$$\sim \frac{1}{1 + x^2} \quad (8)$$

Príklad 4 (\blacksquare Rozdelenie v premennej x^2). Pre rozdelenia (1-4) z príkladu 3 nájdite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $y = x^2$.

Príklad 5 (Dvojrozmerný Gauss 1). Majme dve náhodné premenné x, y , ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-x^2 - y^2 - xy} .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

Príklad 6 (\blacksquare Dvojrozmerný Gauss 2). Majme dve náhodné premenné x, y , ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé. Nájdite rozdelenie pravdepodobnosti premenných

$$v = x + y , w = x - y$$

a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

Príklad 7 (Multi-Gauss). Majme n náhodný premenný $(x_1, \dots, x_n) = x$, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{1}{2}x^T M x},$$

kde M je zadaná symetrická matica. Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, ktoré z premenných x sú nezávislé.

Príklad 8 (■ Binomické \rightarrow Poisson). Ukážte, že binomické rozdelenie prejde v limite veľkého počtu pokusov ($n \rightarrow \infty$) ale konečnej strednej hodnoty (tj. $np = \text{const} = \lambda$) na Poissonove rozdelenie s patričnou strednou hodnotou

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Príklad 9 (■ Poisson \rightarrow Gauss). Rozmyslite si, že pre prípad Poissonovho rozdelenia v limite veľkej strednej hodnoty očakávame, že náhodná premenná sa bude dať vyjadriť v tvare

$$k = \lambda + \sqrt{\lambda} x,$$

kde x je nová náhodná premenná pre ktorú očakávame konečné rozdelenie pravdepodobnosti. Ukážte, že takéto x je potom v limite $\lambda \rightarrow \infty$ dané Gaussovským rozdelením s $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Rozmyslite si, ako by vyzeralo rozdelenie náhodnej premennej y , ktorú by sme zadefinovali ako $k = \lambda + y$.

Príklad 10 (Náhodné generátory 1). Nájdite predpis, ako za pomoci generátora rovnomerne rozdelených náhodných čísel z intervalu $(0, 1)$ vyrobiť náhodný generátor náhodných čísel daných rozdelením (3,4,8) z príkladu 3.

Príklad 11 (■ Generátor náhodného smeru). Nájdite generátor náhodného smeru z generátora dvoch rovnomerne rozdelených náhodných čísel ξ, η na intervale $(0, 1)$. Výsledkom by teda mali byť uhly θ, ϕ , ktoré budú reprezentovať rovnomerne rozdelený náhodný smer v troch rozmeroch.

Zovšeobecnite tento postup na n -rozmerný prípad a z náhodných čísel rovnomerne rozdelených

na intervale $(0, 1)$ vyrobte náhodný smer v n -rozmernom priestore.

Príklad 12 (Náhodné generátory 2). V nejakom programe náhodné generátory z príkladov 10 a 11 naprogramujte. Vygenerujte vašim programom veľa čísel, zobrazte histogram výsledkov a overte, že robia naozaj to, čo by mali.

Príklad 13 (Rozdelenia vlastných hodnôt v súboroch náhodných matíc). Na tento príklad budete potrebovať počítačový matematický program, ktorý zvláda veci ako počítanie vlastných hodnôt väčších matíc a spracovanie veľkého množstva dát. Napríklad Mathematica.

V príklade budeme používať rôzne pravdepodobnostné rozdelenia. Zvedavosti sa medze nekladú, ale mali by ste skúsiť aspoň niektoré z týchto

- ± 1 s rovnakou pravdepodobnosťou,
- rovnomerné na intervale $(-1, 1)$,
- $\pm \sqrt[3]{3}$ s rovnakou pravdepodobnosťou,
- normálne s nulovou strednou hodnotou a $\sigma^2 = 1$,
- nejaké iné s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou disperziou.

- a. Napíšte program, ktorý pre zadané n vygeneruje symetrickú maticu, ktorej vstupy budú náhodné čísla so zadaným rozdelením pravdepodobnosti.¹
- b. Nechajte program vygenerovať veľa takýchto matíc (~ 1000) a vykreslite histogram všetkých vlastných hodnôt, ktoré ste takto dosiahli. Sledujte, ako sa mení tento histogram keď zväčšujete veľkosť matice od $n = 2$ po $n = 20$.
- c. Porovnajzte rozdiel medzi histogramami vlastných hodnôt pre rôznej pravdepodobnostné rozdelenia vstupov.

¹Dobrý nápad je napríklad vygenerovať ľubovoľnú maticu, pripočítať k nej jej transponovanú a vydeliť tak, aby sme nepokazili σ^2 .