Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia

cviko bolo 15.5.2019 *Langevinova rovnica*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

- Langevinova rovnica

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \alpha\vec{v} + \vec{f}$$

  $\vec{F}$ je vonkajšia sila (deterministická), $\vec{f}$ je náhodná sila

- biely šum

$$\langle f_i(t)\rangle = 0\ ,\ \langle f_i(t_1)f_j(t_2)\rangle \sim \delta_{ij}\delta(t_2 - t_1)$$

  a všetky vyššie triviálnou kombináciou týchto dvoch

Príklad 1 (■ Voľná aristotelovská častica)**.** Nájdite strednú polohu a disperziu polohy voľnej častice v extrémne odporovom prostredí (tj. v prípade, kedy môžme zobrať $m \to 0$).

Príklad 2 (■ Voľná častica)**.** Nájdite strednú rýchlosť a koreláciu medzi zložkami rýchlosti častice popísanej úplnou rovnicou. Nájdite strednú hodnotu kinetickej energie častice.

Nájdite tiež strednú polohu a disperziu polohy takejto častice.

Príklad 3 (Einsteinov vzťah)**.** Z výsledku predchádzajúcej úlohy pre strednú kinetickú energiu častice odvoďte Einsteinov vzťah medzi koeficientom difúzie, koeficientom odporu a teplotou.

Príklad 4 (■ Komplikovanejší súbor častíc)**.** V predchádzajúcich príkladoch sme uvažovali súbor častíc, ktoré všetky začínali v ostro definovanom bode s ostro definovanou rýchlosťou. Ako sa zmení výsledok prvých dvoch príkladov, keď začneme so súborom častíc, v ktorom bude rýchlosť rozdelená gaussovsky?

Príklad 5 (Aristotelovská častica na pružine)**.** Majme časticu v extrémne odporovom prostredí, ktorá sa nachádza na pružine, tj. pod vplyvom vonkajšej sily $\vec{F} = -k\vec{x}$. Nech častica štartuje z fixovanej polohy mimo rovnováhy.

Pre časticu nájdite strednú polohu a disperziu polohy. Nájdite tiež koreláciu polôh a rýchlostí.

Príklad 6 (Častica na pružine)**.** Podobne ako v predchádzajúcom príklade, ale pre časticu popísanú úplnou rovniciou.

Príklad 7 (Rozdelenie pravdepodobnosti pre biely šum)**.** Rozmyslite si, že keďže $\vec{f}(t)$ je náhodná funkcia, rozdelenie pravdepodobnosti je v tomto prípade funkcionál $P[\vec{f}(t)]$. Tiež si rozmyslite, že ak $x_f(t)$ je riešenie Langevinovej rovnice pre silu $\vec{f}(t)$, potom stredná hodnota veličiny $g[x]$ je funkcionálny integrál

$$\langle g\rangle = \int D\vec{f}\, g(x_f)P[\vec{f}]\ .$$

Ukážte, že pre biely šum

$$P[\vec{f}(t)] = Ne^{-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t)}{2\sigma^2}}\ ,$$

kde σ^2 súvisí s konštantou úmernosti (ako?) v $\langle f_i f_j\rangle$ a N je normovacia konštanta. Ide teda o zovšeobecnenie Gaussovského rozdelenia.

Návod. Generujúci funkcionál

$$Z[\vec{J}] = \int Df\, P[f]e^{\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}\cdot\vec{f}}\ .$$