Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 3.4.2019 *jednoduché štatistické systémy*

Hustota stavov

Príklad 1 (■ Hustota stavov 1). Majme zadaný disperzný vzťah $E(k)$. Nájdite hustotu stavov $g(E)$, tj. funkciu, ktorá v integráloch cez energie bude robiť to, že budeme správne zarátavať všetky energetické stavy, a teda napríklad

$$\bar{E} = \int dE\, E\, g(E)\ . \tag{1}$$

Návod. Pozor na možnú degeneráciu energetických hladín.

Príklad 2 (Hustota stavov 2). Nájdite hustotu stavov pre

a. ■ klasickú časticu,

b. relativistickú časticu,

c. ■ ultrarelativistickú časticu,

d. ■ kvantovomechanickú časticu v kocke s hranou L bez spinu a so spinom,

e. kvantovomechanickú časticu bez spinu a so spinom vo valci.

Výsledok. Pre klasicku a kvantovomechanicku casticu

$$g(E) = g_s \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}\ , \tag{2}$$

a pre ultrarelativistickú časticu

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3} E^2\ . \tag{3}$$

Faktor g_s za možnú energetickú degeneráciu.

Príklad 3 (Hustota stavov 3). Ako vyzerá výsledok predchádzajúceho príkladu v dvoch a v jednom priestorovom rozmere? Ako vyzerá v n-rozmeroch?

Plyn bozónov a plyn femiónov

Príklad 4 (■ Bozónová stavová rovnica). Ako vyzerá prvá kvantová oprava k stavovej rovnice bozónového plynu? Rozmyslite si, či sa tým tlak plynu zväčšil alebo zmenšil a či je to tak, ako by ste čakali.

Príklad 5 (■ Fermiónová stavová rovnica). Ako vyzerá prvá kvantová oprava k stavovej rovnice fermiónového plynu? Rozmyslite si, či sa tým tlak plynu zväčšil alebo zmenšil a či je to tak, ako by ste čakali.

Príklad 6 (Druhá korekcia k stavovej rovnici). Dopočítajte druhú kvantovú korekciu k stavovej rovnicu plynu bozónov a plynu fermiónov.

Príklad 7 (Kvantová korekcia k tepelným kapacitám). Ako zmení kvantová korekcia v stavovej rovnici bozónového a fermiónového plynu jeho tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme a pri konštantnom tlaku? Ako vyzerá Mayerov vzťah?

Príklad 8 (■ Plyn fotónov a žiarenie dokonale čierneho telesa). Energia fotónu je $E = \hbar\omega$ a každá energetická hladina je dvojnásobne degenerovaná. Počet fotónov sa nezachováva

a. Nájdite hustotu stavov v priestore frekvencií.

b. V stave so zadanou frekvenciou sa môže nachádzať ľubovoľne veľa fotónov. Nájdite štatistickú sumu Z_ω pro fotóny s danou frekvenciou ak je plyn fotónov v rovnováhe s rezervoárom s teplotou T (a nulovým fotónovým chemickým potenciálom).

c. Na základe toho, že pre neinteragujúce častice je výsledná štatistická suma súčinom štatistických sú nájdite vzťah pre logaritmus celkovej štatistickej sumy $\log Z$.

d. Nájdite vzťah pre strednú energiu a pre hustotu energie $E(\omega)d\omega$ v priestore frekvencií.[1]

[1]Tomu sa hovorí Planckov zákon.

[2]Z toho, že pre tok vyžiarenej energie platí $Ec/4V$ dostaneme Stefan-Boltzmannov zákon.

e. Nájdite teplotnú závislosť hustoty energie E/V, tlaku, entropie a tepelnej kapacity C_V.[2]

Príklad 9 (Einsteinov model tuhej látky)**.** Pre fonóny v tuhej látke platí disperzný vzťah $E = \hbar c_S k$, kde c_S je rýchlosť zvukových vĺn v mriežke tuhej látky. Použite výsledky predchádzajúcej úlohy, považujte vibrácie mriežky za plyn neiteragujúcich fonónov a nájdite tepelnú kapacitu mriežky pri nízkych teplotách. Kde je problém pri vysokých teplotách?

Príklad 10 (■ Degenerovaný Fermiónový plyn)**.** Majme plyn voľných fermiónov s hmotnosťou m a spinom 1/2, čo znamená dvojnásobnú degeneráciu energetických hladín.

a. Rozmyslite si, že v limite $T \to 0$ je Fermi-Diracovo rozdelenie
$$n(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1} \to \begin{cases} 1 & E < \mu \\ 0 & E > \mu \end{cases} . \quad (4)$$
V tejto limite sú teda obsadené energetické hladiny iba po istú maximálnu energiu.

b. Pre fixovaný počet častíc z podmienky
$$N = \int_0^{E_F} dE\, g(E) \quad (5)$$
nájdite túto maximálnu energiu E_F. Nájdite energiu tohto systému a jeho tlak. Usúďte, že fermióny majú nenulový tlak aj pri nulovej teplote a že to je tak, ako by ste čakali.

Príklad 11 (Fermiónový plyn pri nízkych teplotách)**.** Pozrime sa na plyn fermiónov pri nízkej, ale nenulovej teplote.

a. Rozmyslite si, že v takom prípade sa budú oproti predchádzajúcemu príkladu meniť veci len pre elektróny, ktorých energia je v kT okolí maximálnej energie E_F.

b. Ukážte, že z podmienky aby sa nemenil počet fermiónov v systéme $dN/dT = 0$ dostaneme podmienku $d\mu/dT = 0$, čo okrem iného znamená že sa nemení energia E_F (pri malých zmenách teploty).

c. Vypočítajte energiu tohto plynu a jeho tepelnú kapacitu. Ukážte, že $C_V \sim T$.

Klasický plyn interagujúcich častíc

Príklad 12 (Viriálový rozvoj)**.** Rozmyslite si, že odvodenie van der Waalsovej rovnice z prednášky je príkladom viriálového rozvoja, ktorý je rozvojom stavovej rovnice do hustoty častíc
$$\frac{p}{kT} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(T) \left(\frac{N}{V}\right)^n . \quad (6)$$
Čomu sa rovná prvý viriálový koeficient?

Príklad 13 (Druhý viriálový koeficient 1)**.** Rozmyslite si, že na prednáške sme dokázali, že
$$B_2(T) = -\frac{1}{2V}\int f_{12}\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \ , \quad (7)$$
kde $f(r)$ je Mayerova f funckia daná ako
$$f_{ij} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \ , \ f(r) = e^{-\beta V(r)} - 1 \quad (8)$$
a $V(r)$ je dvojčasticový potenciál. Pre akú asymtotiku $V \sim r^n$ keď $r \to \infty$ je tento koeficient konečný?

Príklad 14 (■ Nečakaný faktor 2 pre biliardové gule)**.** Majme interakčný potenciál v tvare
$$V(R) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ 0 & r > \sigma \end{cases} . \quad (9)$$

a. Rozmyslite si, o akú interakciu ide.

b. Ukážte, že v takom prípade $B_2 = 2\pi\sigma^3/3$.

c. Rozmyslite si, že to je o faktor 2 inak, ako by ste čakali.

Príklad 15 (■ Druhý viriálový koeficient 2)**.** Majme interakčný potenciál v tvare
$$V(R) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ -V_0 & \sigma < r < 2\sigma \\ 0 & r > 2\sigma \end{cases} . \quad (10)$$

a. Rozmyslite si, o akú interakciu ide.

b. Vypočítajte B_2 pre takýto potenciál.

c. Ako vyzerá B_2 pre vysoké teploty?

Príklad 16 (Tretí viriálový koeficient)**.** Nájdite tretí viriálový koeficient pre potencilál (9) a pre potenciál (10). Pre koeficient B_3 sa dá ukázať
$$B_3(T) = -\frac{1}{3V}\int f_{12} f_{13} f_{23}\, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \ . \quad (11)$$

Príklad 17 (Viriálny Mayerov vzťah)**.** Nájdite viriálový rozvoj rozdielu tepelných kapacít $C_p - C_V$.