

# Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

## Príklady z cvičenia

cviko bolo 17.4.2019

kritické javy, fázové prechody, Isingov model

Akékoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

### Isingov Model

**Príklad 1** (■ Malá štvorcová mriežka). Nájdite štatistickú sumu pre Isingov model na štvorcovej mriežke  $2 \times 2$  s periodickými okrajovými podmienkami. Aká je stredná hodnota energie pri nulovom vonkajšom poli. Aká je magnetická susceptibilita pri vysokej a pri nízkej teplote? Ako je to v prípade voľných okrajových podmienok?

**Príklad 2** (Explicitný rozvoj štatistickej sumy). Nájdite niekoľko prvých členov vysoko a nízko teplotného rozvoja štatistickej sumy Isingovho modelu na

- trojuholníkovej mriežke,
- kubickej mriežke.

**Príklad 3** (3-stavový Pottsov model).  $q$ -stavový Pottsov model je zovšeobecnenie Isingovho modelu. V ňom na každom bode mriežky žije premenná  $\sigma$  s  $q$  možnými hodnotami a energia dvojice susedných bodov je úmerná  $\delta_{\sigma_i, \sigma_j}$ . Ukážte, že v prípade  $q = 3$  je model ekvivalentný modelu s hamiltoniánom

$$H = -H \sum_{i \sim j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j, \quad (1)$$

kde možné hodnoty vektora  $\vec{s}$  sú

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Metódou stredného poľa nájdite magnetizáciu  $\langle \vec{s}_i \rangle$ , voľnú energiu a ukážte, že model má fázový prechod.

### Teória stredného poľa

**Príklad 4** (■ Hyperkubická mriežka). Nájdite kritickú teplotu Isingovho modelu na kubickej mriežke v  $d$  rozmeroch použitím aproximácie stredného poľa pri nenulovom vonkajšom poli.

### Fázové prechody a Landau teória

**Príklad 5** (■ Isingove kritické koeficienty zo stredného poľa). Aké kritické koeficienty predpovedá pre Isingov model na  $d$  rozmernej kubickej mriežke metóda stredného poľa?

**Príklad 6** (■ van der Waalsov fázový prechod). Majme (neideálny) plyn, ktorý je popísaný van der Waalsovou stavovou rovnicou. Tento plyn má fázový prechod prvého druhu popísaný Clausius-Clapeyronovou rovnicou. Pre istú kritickú teplotu je však prechod až druhého rádu.

- Nájdite túto kritickú teplotu. Aké sú hodnotu tlaku a hustoty plynu v tomto bode?
- Aké sú kritické koeficienty v okolí tohto kritického bodu?

**Príklad 7** (■ Landauove kritické koeficienty). Pre voľnú energiu v tvare

$$F(M) = a_0 + \frac{1}{2}a_2M^2 + \frac{1}{4}a_4M^4, \quad (3)$$

kde  $a_4 > 0$  nájdite všetky kritické koeficienty<sup>1</sup>?

**Príklad 8** (Zložitejší Landau). Ako vyzerá fázový diagram pre voľnú energiu v tvare

$$F(M) = \frac{1}{2}a_2(T)M^2 - \frac{1}{4}a_4M^4 + \frac{1}{6}a_6M^6, \quad (4)$$

kde  $a_6 > 0, a_4 > 0$ ? Ako vyzerajú kritické koeficienty pre tento model?

### Betheho aproximácia

**Príklad 9** (Hyperkubická mriežka). Nájdite kritickú teplotu Isingovho modelu na kubickej mriežke v  $d$  rozmeroch použitím Betheho aproximácie a najjednoduchšieho klastru.

**Príklad 10** (Hexagonálna mriežka). Nájdite kritickú teplotu Isingovho modelu na hexagonálnej mriežke použitím Betheho aproximácie a najjednoduchšieho klastru so štyrmi spinmi.

<sup>1</sup>Pre niektoré bude treba doplniť člen  $-BM$ .