

# Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

## Domáca úloha 1

zadaná 17.3.2020, riešenia mi pošlite na email najneskôr do 7.4.2020

---

**Príklad 1** (Opakovanie štatistickej fyziky). Majme systém  $N$  spinov s možnými stavmi  $\{0, 1\}$  a energiami  $\{-\varepsilon, \varepsilon\}$ . Definujme magnetizáciu ako  $M = n_1 - n_0$ .

- Nájdite entropiu a teplotu tohto systému, keď sa na neho pozeráme ako na **mikrokanonický súbor** s energiou  $E$ .
  - Za akých podmienok, ak vôbec, môže byť táto teplota záporná?
  - Nájdite magnetizáciu systému  $M$  ako funkciu  $E$ .
  - Ďalej sa na spiny budeme pozeráť ako na **kanonický súbor** s teplotou  $T$ . Nájdite strednú energiu systému  $\bar{E}$  a ukážte že výsledok je kompatibilný s mikrokanonickým výsledkom.
  - Vypočítajte strednú magnetizáciu.
  - Vypočítajte entropiu  $S = k \log(\Omega(\bar{E}))$ .
  - Vypočítajte entropiu z kanonickej partičnej sumy  $Z$ .
- 

**Príklad 2** (Generátor náhodného smeru). Dotiahnite úlohu o generovaní náhodného smeru v troch rozmeroch do konca. To znamená, že máme generátor dvoch rovnomerne rozdelených náhodných čísel  $\xi, \eta$  na intervale  $(0, 1)$  a chcete z nich vyrobiť uhly  $\theta, \phi$ , ktoré budú reprezentovať rovnomerne rozdelený náhodný smer v troch rozmeroch.

---

**Príklad 3** (Navrhovanie experimentu). Štandardný liek pre chorobu  $X$  má účinnosť 63%, čím sa myslí že po podaní lieku sa človek vylieči s pravdepodobnosťou 0.63. Vyvinuli sme nový liek, ktorý má podľa našich predpokladov účinnosť 68%. Naším cieľom je zistiť, koľko ľudí musíme vziať do experimentu, aby sme mali šancu ukázať, že náš nový liek je lepší ako štandardný liek. Experiment vyzerá tak, že zadaný počet  $n$  ľudí v teste ich rozdelíme do dvoch rovnako veľkých skupín. Jednej skupine dá prvý liek a druhej skupine druhý liek. Ľudia v skupinách sa podľa uvedených pravdepodobností vyliečia alebo nie. Pre hraničnú hodnotu v pravdepodobnostnom teste zoberte  $p = 0.05$ , čo znamená hraničnú hodnotu  $\chi^2$  rovnú 3.84.<sup>1</sup>

- Skúste tento počet najskôr odhadnúť z odhadu fluktuácií v experimente.
- V počítačovom programe spravte program, ktorý vygeneruje náhodný test liekov. Program potom vypočíta pravdepodobnosť, s ktorou je rozdiel medzi oboma skupinami iba štatistická fluktuácia.
- Nechajte program vygenerovať výsledok pre dané  $n$  niekoľko krát a porovnajte získané hodnoty  $p$ . Číslo  $n$  postupne zvyšujte od 10 až kým nebude rozumné očakávať, že experiment dopadne tak, ako by ste chceli.

Tento príklad sa asi najjednoduchšie rieši v Mathematice alebo Exceli.

<sup>1</sup>Čo prezradila Mathematica po zadaní `FindRoot[1 - CDF[ChiSquareDistribution[1], x] == 0.05, x, 3]`.

**Príklad 4** (Rozdelenia vlastných hodnôt v súboroch náhodných matic). **Bonus.** Na tento príklad budete potrebovať počítačový matematický program, ktorý zvláda veci ako počítanie vlastných hodnôt väčších matic a spracovanie veľkého množstva dát. Napríklad Mathematica.

V príklade budeme používať rôzne pravdepodobnostné rozdelenia. Zvedavosti sa medze nekladú, ale mali by ste skúsiť aspoň niektoré z týchto :  $\pm 1$  s rovnakou pravdepodobnosťou, rovnomerné na intervale  $(-1, 1)$ ,  $\pm\sqrt[3]{3}$  s rovnakou pravdepodobnosťou, normálne s nulovou strednou hodnotou a  $\sigma^2 = 1$ , ešte nejaké iné s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou disperziou.

- a. Napíšte program, ktorý pre zadané  $n$  vygeneruje symetrickú maticu, ktorej vstupy budú náhodné čísla so zadaným rozdelením pravdepodobnosti.<sup>2</sup>
- b. Nechajte program vygenerovať veľa takýchto matic ( $\sim 1000$ ) a vykreslite histogram všetkých vlastných hodnôt, ktoré ste takto dosiahli. Sledujte, ako sa mení tento histogram keď zväčšujete veľkosť matice od  $n = 2$  po  $n = 20$ .
- c. Porovnajzte rozdiel medzi histogramami vlastných hodnôt pre rôznej pravdepodobnostné rozdelenia vstupov.

---

<sup>2</sup>Dobrý nápad je napríklad vygenerovať ľubovoľnú maticu, pripočítať k nej jej transponovanú a vydeliť dvomi.