# Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
## Príklady z cvičenia

*cviko bolo 18.2.2020* *náhodné premenné, rozdelenia pravdepodobnosti, generátory náhodných čísel*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

---

**Príklad 1** (Pravdepodobnosti 1)**.** Pri ceste pozorujete dopravu, ktorá prechádza okolo. Autobusy okolo vás prechádzajú v pravidelných intervaloch každých 5 minút. Autá okolo vás prechádzajú náhodne, pričom za malý čas $dt$ je pravdepodobnosť že okolo vás prejde auto $dt/\tau$, kde $\tau = 5min$.

a. Ukážte, že priemerný počet áut, ktoré okolo vás prejdú za jednu hodinu je 12.

b. Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne $n$ autobusov? Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne $n$ áut?

c. Aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny $\Delta_B$, ktorá je časom medzi dvomi po sebe idúcimi autobusmi? Aké je rozdelenie tejto veličiny $\Delta_A$ pre autá?

d. Ak prídeme na cestu v náhodnom čase, aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny $\delta_B$, ktorá meria čas do príchodu najbližšieho autobusu? Aké je rozdelenie tejto veličiny $\delta_A$ pre autá?

**Príklad 2** (Pravdepodobnosti 2)**.** Klasický harmonický oscilátor s vlastnou frekvenciou $\omega$ má energiu $E$. Na oscilátor sa pozrieme v náhodnom časovom okamihu jeho vývoja. Aké je rozdelenie pravdepodobnosti $\rho(x)$ jeho polohy? T.j. s akou pravdepodobnosťou sa v tomto okamihu nachádza v intervale $(x, x + dx)$?

**Príklad 3** (Rozdelenia pravdepodobnosti)**.** Pre nasledujúce rozdelenia pravdepodobnosti jednej náhodnej premennej nájdite normalizačnú konštantu, charakteristickú funkciu, $n$-tý moment a varianciu.

$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (0,1) \tag{1}$$
$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (-1,1) \tag{2}$$
$$\text{rovnomerné na intervale } (a,b) \tag{3}$$
$$\blacksquare \sim \sqrt{1-x^2} \text{ (polkruhové)} \tag{4}$$
$$\sim e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \text{ (Gauss)} \tag{5}$$
$$\sim x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \text{ (Weibull)} \tag{6}$$
$$\sim \frac{1}{2+e^x+e^{-x}} \tag{7}$$
$$\sim \frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

**Príklad 4** ($\blacksquare$ Rozdelenie v premennej $x^2$)**.** Pre rozdelenia (1-4) z príkladu 3 nájdite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $y = x^2$.

**Príklad 5** (Dvojrozmerný Gauss 1)**.** Majme dve náhodné premenné $x, y$, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-x^2-y^2-xy} \; .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

**Príklad 6** ($\blacksquare$ Dvojrozmerný Gauss 2)**.** Majme dve náhodné premenné $x, y$, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \; .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé. Nájdite rozdelenie pravdepodobnosti premenných

$$v = x + y \; , \; w = x - y$$

a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

**Príklad 7** (Multi-Gauss)**.** Majme $n$ náhodný premenný $(x_1, \ldots, x_n) = x$, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{1}{2}x^T M x} \ ,$$

kde $M$ je zadaná symetrická matica. Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, ktoré z premenných $x$ sú nezávislé.

**Príklad 8** (■ Binomické → Poisson)**.** Ukážte, že binomické rozdelenie prejde v limite veľkého počtu pokusov ($n \to \infty$) ale konečnej strednej hodnoty (tj. $np = const = \lambda$) na Poissonove rozdelenie s patričnou strednou hodnotou

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ .$$

**Príklad 9** (■ Poisson → Gauss)**.** Rozmyslite si, že pre prípad Poissonovho rozdelenia v limite veľkej strednej hodnoty očakávame, že náhodná premenné sa bude dať vyjadriť v tvare

$$k = \lambda + \sqrt{\lambda} x \ ,$$

kde $x$ je nová náhodná premenná pre ktorú očakávame konečné rozdelenie pravdepodobnosti. Ukážte, že takéto $x$ je potom v limite $\lambda \to \infty$ dané Gaussovským rozdelením s $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Rozmyslite si, ako by vyzeralo rozdelenie náhodnej premennej $y$, ktorú by sme zadefinovali ako $k = \lambda + y$.

**Príklad 10** (Náhodné generátory 1)**.** Nájdite predpis, ako za pomoci generátora rovnomerne rozdelených náhodných čísel z intervalu $(0, 1)$ vyrobiť náhodný generátor náhodných čísel daných rozdelením (3,4,8) z príkladu 3.

**Príklad 11** (■ Generátor náhodného smeru)**.** Nájdite generátor náhodného smeru z generátora dvoch rovnomerne rozdelených náhodných čísel $\xi, \eta$ na intervale $(0, 1)$. Výsledkom by teda mali byť uhly $\theta, \phi$, ktoré budú reprezentovať rovnomerne rozdelený náhodný smer v troch rozmeroch.

Zovšeobecnite tento postup na $n$-rozmerný prípad a z náhodných čísel rovnomerne rozdelených na intervale $(0, 1)$ vyrobte náhodný smer v $n$-rozmernom priestore.

**Príklad 12** (Náhodné generátory 2)**.** V nejakom programe náhodné generátory z príkladov 10 a 11 naprogramujte. Vygenergujte vašim programom veľa čísel, zobrazte histogram výsledkov a overte, že robia naozaj to, čo by mali.

**Príklad 13** (Rozdelenia vlastných hodnôt v súboroch náhodných matíc)**.** Na tento príklad budete potrebovať počítačový matematický program, ktorý zvláda veci ako počítanie vlastných hodnôt väčších matíc a spracovanie veľkého množstva dát. Napríklad Mathematica.

V príklade budeme používať rôzne pravdepodobnostné rozdelenia. Zvedavosti sa medze nekladú, ale mali by ste skúsiť aspoň niektoré z týchto

- $\pm 1$ s rovnakou pravdepodobnosťou,
- rovnomerné na intervale $(-1, 1)$,
- $\pm \sqrt[3]{3}$ s rovnakou pravdepodobnosťou,
- normálne s nulovou strednou hodnotou a $\sigma^2 = 1$,
- nejaké iné s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou disperziou.

a. Napíšte program, ktorý pre zadané $n$ vygeneruje symetrickú maticu, ktorej vstupy budú náhodné čísla so zadaným rozdelením pravdepodobnosti.[1]

b. Nechajte program vygenerovať veľa takýchto matíc ($\sim 1000$) a vykreslite histogram všetkých vlastných hodnôt, ktoré ste takto dosiahli. Sledujte, ako sa mení tento histogram keď zväčšujete veľkosť matice od $n = 2$ po $n = 20$.

c. Porovnajte rozdiel medzi histogramami vlastných hodnôt pre rôznej pravdepodobnostné rozdelenia vstupov.

[1] Dobrý nápad je napríklad vygenerovať ľubovoľnú maticu, pripočítať k nej jej transponovanú a vydeliť tak, aby sme nepokazili $\sigma^2$.