

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Domáca úloha 4

zadaná 4.5.2021, termín na odovzdanie je 30.5.2020 emailom na juraj.tekel@gmail.com

Príklad 1 (2D Gaussovské integrovanie). Budeme počítať nasledovný integrál

$$Z(g) = \int dx_1 dx_2 e^{-\left[\frac{1}{2}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + g x_1^2 x_2^2\right]},$$

kde x_1, x_2 sú reálne premenné a a, g sú reálne parametre. Budú nás zaujímať príspevky do druhého rádu v poruchovom rozvoju podľa parametra g , tj.

$$Z = Z_0 + gZ_1 + g^2Z_2,$$

kde

$$Z_0 = Z(0), \quad Z_i = Z_0 \langle (x_1^2 x_2^2)^i \rangle_0,$$

kde $\langle \dots \rangle_0$ označuje strednú hodnotu

$$\langle \dots \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int dx_1 dx_2 (\dots) e^{-\frac{1}{2}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

Prvý spôsob, ako sa dá príklad počítať je priamo v termínoch premenných x_1, x_2 . Ako vyzerajú pravidlá pre počítanie s diagramami v takomto prípade? Ako vyzerajú všetky rôzne diagramy prispievajúce k Z_1 ? Ako diagramy prispievajúce k Z_2

Druhý spôsob je prejsť k premenným y_1, y_2 , v ktorých bude mať matica v exponente diagonálny tvar. Aký problém toto rieši? Ako vyzerajú diagramy prispievajúce k Z_1 a Z_2 teraz?

Vypočítajte príspevky od všetkých diagramov a overte, že oba postupy vedú na ten istý výsledok.

Návod. Pomôže označovať nohy v diagramoch prislúchajúce rôznym premenným inak. Napríklad rôznou farbou alebo jeden druh nôh rovný a druhý druh nôh čiarkovaný.

Príklad 2 (Noisy Aristotelian harmonic oscillator). Let us have a particle which is subject to a random external white noise force and a harmonic oscillator force $\vec{F} = -k\vec{x}$. Moreover, particle is in a damping medium with a very large coefficient γ , so we can study the particle in the $m \rightarrow 0$ limit.

The particle starts its motion from rest at some position away from equilibrium. What is the mean position and the dispersion of the position of the particle?

Príklad 3 (Two models of the atmosphere). Let us have an atmosphere in local thermodynamic equilibrium governed by the collision-less Boltzman kinetic equation $Df_0 = 0$. Under the assumptions of

- isothermic,
- adiabatic,

composition of the gas, what is the dependence of the density of the gas on the height.