

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 16.2.2021

opakovanie štatistickej fyziky

Akékoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1 (Čriepky z termodynamiky).

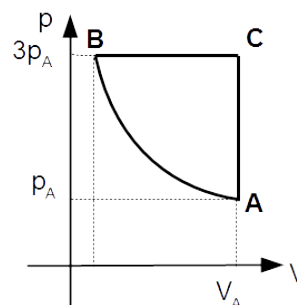
- ■ Ukážte, že na pV diagrame je adiabata ideálneho plynu strmšia ako izoterma v rovnakom bode.
- Kilomól ideálneho plynu koná vratnú zmenu podľa rovnice $pV^\kappa = \text{const}$, kde $\kappa = C_p/C_V$. Dokážte explicitným výpočtom, že pri takomto deji je teplo prijaté plynom nulové.
- Určite kritický tlak, teplotu a objem plynu, ktorý sa správa podľa van der Waalsovej stavovej rovnice.

Príklad 2 (Čriepky z pravdepodobnosti).

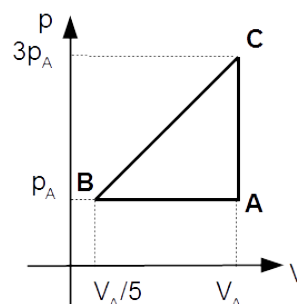
- Majme náhodnú premennú x rovnomerne rozdelenú na intervale $(-a, 0)$ a náhodnú premennú y rovnomerne rozdelenú na intervale $(0, b)$, pričom $a, b > 0$. Nájdite strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýlku premennej $z = x + y$.
- V guľi s polomerom R náhodne, s rovnomernou hustotou pravdepodobnosti v celom objeme, vyberiem jeden bod. V akej priemernej vzdialenosti od stredu gule sa bude nachádzať?
- ■ Bežný balíček 32 sedmových kariet rozdáme náhodne medzi štyroch ľudí. S akou pravdepodobnosťou nebude mať jeden konkrétny z nich žiadne eso? S akou pravdepodobnosťou nebudú mať žiadne eso aspoň (ľubovoľní) dvaja z nich? (Esa sú v balíčku štyri.) Ako by to vyzeralo pre žolíkové karty?
- V krabici s objemom V majme N častíc ideálneho plynu. Pozrime sa teraz v náhodnom momente na náhodný kus krabice s objemom V/N . S akou pravdepodobnosťou v ňom nebude žiadna častica?

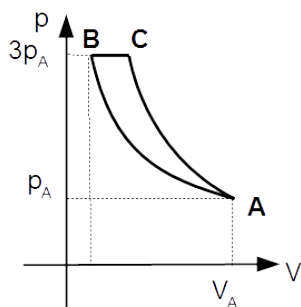
Príklad 3 (Kruhové deje). Majme n molov jednotátomového ideálneho plynu ako médium v procese zobrazenom na obrázku.

- Vyjadrite tlak, teplotu a objem plynu vo všetkých koncových bodoch úsekov kruhového deja pomocou zadaných hodnôt p_A, V_A .
- Ktorým smerom musí kruhový dej bežať aby premieňal teplo na prácu a nefungoval ako chladnička? Prečo?
- Na ktorých úsekoch kruhového deja plyn prijíma teplo? Prečo?
- Na ktorých úsekoch plyn koná prácu? Prečo?
- Pre každý úsek vypočítajte pre plyn dodané teplo, vykonanú prácu a zmenu entropie medzi začiatočným a koncovým bodom.
- Aká je účinnosť tohto stroja?



Úsek AB je adiabata.

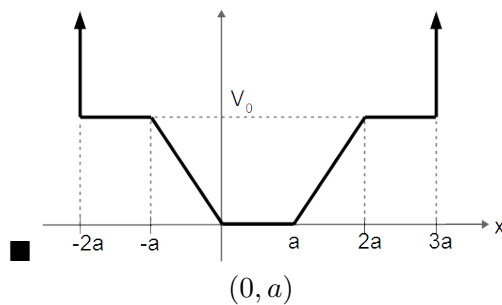
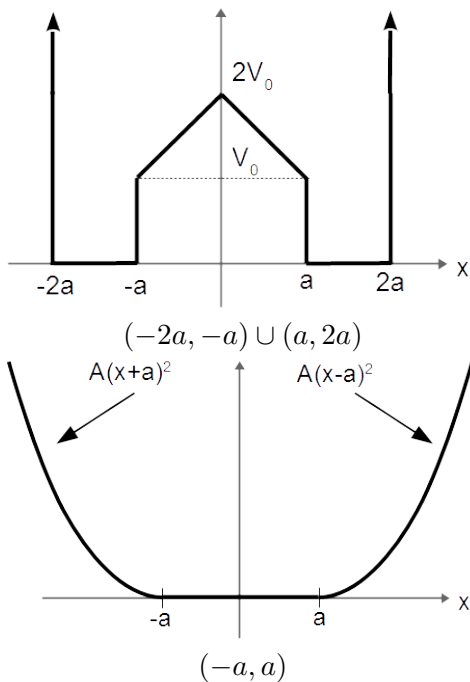




Úsek AB je izoterma, AC adiabata.

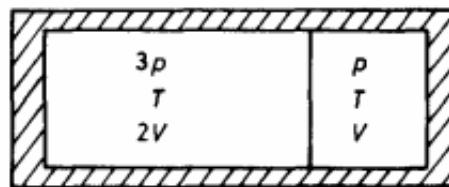
Príklad 4 (Maxwellovia Boltzmanovia). Majme plyn N neinteragujúcich častíc, ktoré sa nachádzajú v jednom rozmere a v potenciáli ako na obrázku. Plyn je pri teplote T .

- Napište hustotu pravdepodobnosti nájsť časticu s rýchlosťou v v mieste x . Ako vyzerá rozdelenie iba pre premennú x ?
- Kde sa častice v priemere nachádzajú a aká je ich celková disperzia okolo tejto hodnoty?
- Aká časť častíc sa nachádza v uvedených intervaloch? ?
- Ako vyzerá limita $T \rightarrow 0$ a $T \rightarrow \infty$ predchádzajúcich výsledkov?



Príklad 5. Majme nádobu s objemom $3V$ rozdelenú pohyblivou a tepelne vodivou prepážkou na dve časti s objemami $V_1 = 2V$ a $V_2 = V$, ktoré sú vyplnené jednoatómovým ideálnym plynom. Na začiatku je v prvej tlak $p_1 = 3p$ a v druhej tlak $p_2 = p$ a v oboch častiach je na začiatku rovnaká teplota T . Nádoba je od okolia tepelne izolovaná.

- Aké látkové množstvá plynu sú na začiatku v oboch častiach?
- Aký bude v nádobe tlak po dosiahnutí rovnováhy?
- Koľko tepla pretečie cez prepážku?
- Aká je celková zmena entropie systému?



Príklad 6. Majme štyri rozlíšiteľné častice, ktoré majú energetické hladiny $0, \Delta$ a 2Δ . Dve z nich sú však divné a základnú hladinu majú dvakrát degenerovanú.

- Ak vieme, že systém má energiu 4Δ , aká je jeho entropia?
- Aký je stredný počet častíc v základom stave?
- Majme ten istý systém, ale v kontakte s rezervoárom s teplotou T . Aký je stredný počet častíc v základom stave teraz?

Príklad 7. ■ Majme N častíc, ktoré sú nezávislé, rozlíšiteľné a ich stavy sú dané kvantovým číslom k s možnými hodnotami $0, 1, 2, 3$, pričom pre energie stavov platí

$$E_0 < E_1 \ll E_2 = E_3 .$$

- Aká bude stredná hodnota energie tohto systému pri teplotách $T_1 = 0$, $E_1 \ll T_2 \ll E_2$ a $T_3 \gg E_2$? Nájdite odpoveď bez toho, aby ste počítali štatistickú sumu, ale dobre ju zdôvodnite.
- Ako vyzerá stredná hodnota kvantového čísla k ako funkcia teploty? Opäť bez veľkých výpočtov, stačí načrtnúť základné vlastnosti tejto funkcie, s patričnou argumentáciou.
- Napište štatistickú sumu pre tento systém a nájdite presný výraz pre strednú hodnotu energie a strednú hodnotu k .

Príklad 8. Majme systém, ktorý má nedegenerovanú základnú energetickú hladinu s energiou 0 , dvakrát degenerovanú hladinu s energiou Δ a trikrát degenerovanú energetickú hladinu s energiou 2Δ .

- Majme v tomto systéme N klasických, rozlíšiteľných častíc pri teplote T . Aká je
 - stredná energia tohto systému a
 - stredná obsadenosť základnej hladiny?
- Majme potom tento systém pri teplote T a v kontakte s rezervoárom častíc s chemickým potenciálom μ . Aká je teraz
 - stredná energia systému a
 - stredná obsadenosť základnej hladiny?¹

Príklad 9. Majme systém, ktorý ma nedegenerovaný základný stav s energiou 0 , dva krát degenerovaný stav s energiou Δ a nedegenerovaný stav s energiou 2Δ . Nech je v ňom plyn N rozlíšiteľných neinteragujúcich klasických častíc pri teplote T .

- Aká je štatistická suma plynu?
- Aká je stredná energia pripadajúca na jednu časticu a aká je stredná obsadenosť energetických hladín.

V situácií $N = 2$ medzi časticami teraz zavedieme interakciu nasledovne. Ak sa častice nachádzajú v tom istom jednočasticovom stave, energia mikrostavu sa zníži o ε .

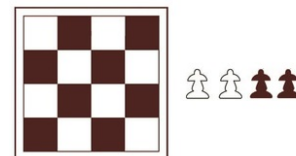
- Aká je štatistická suma dvoch častíc v tomto prípade?
- Aká je ich celková stredná energia?

Príklad 10. Majme šachovnicu 4×4 s čiernymi a bielymi políčkami ako na obrázku. Na šachovnici sa nachádzajú dvaja biely a dvaja čierny pešiaci. Na každom políčku sa môže nachádzať iba jedna figúrka a každý pešiak sa môže nachádzať iba na políčkach svojej farby. Energia pešiaka, ktorý sa nachádza na jednom z vnútorných štyroch políčok je o Δ menšia ako na okrajových políčkach. Šachovnica má teplotu T .

- Aká je štatistická suma tohto systému, ak sú pešiaci tej istej farby
 - rozlíšiteľní,
 - nerozlíšiteľní?

Ako vyzerajú jednotlivé mikrostavy? Nemusíte ich detailne vypisovať, stačí načrtnúť princípálne rôzne možnosti, ich počet a energiu.

- Aký je stredný počet pešiakov akejkoľvek farby v rohoch šachovnice?
- Vymyslíte nejaké pravidlo pre obsadzovanie políčok, ktoré okrem odpudzovania okrajmi šachovnice popisuje príťažlivú interakciu medzi pešákmi tej istej farby. Vypočítajte štatistickú sumu v takomto prípade?



¹Táto časť je veľmi ťažká.

Príklad 11 (Štatistika 1). Majme tri častice, z ktorých sa každá môže nachádzať v stavoch s energiami $-E, 0, E$, stav s energiou 0 je dvakrát degenerovaný a ostatné pričom stavy sú bez degenerácie. Schematicky vypíšte všetky povolené mikrostavy tohto systému a napíšte preň štatistickú sumu v prípade, že častice spĺňajú

- klasickú štatistiku a sú rozlíšiteľné,
- Fermi-Dirackovu štatistiku,
- Bose-Einsteinovu štatistiku,
- modifikovanú štatistiku, v ktorej je maximálne obsadzovacie číslo jednočasticového stavu 1 , ale častice sú rozlíšiteľné.

Príklad 12 (■ Štatistika 2). Majme dve častice, z ktorých sa každá môže nachádzať v stavoch s energiami $0, E, 2E, 3E, 4E$ a stavy sú bez degenerácie. Schematicky vypíšte všetky povolené mikrostavy tohto systému a napíšte preň štatistickú sumu v prípade, že častice spĺňajú

- klasickú štatistiku a sú rozlíšiteľné,
- Fermi-Dirackovu štatistiku,
- Bose-Einsteinovu štatistiku,
- modifikovanú štatistiku, v ktorej nemôžu byť súčasne obsadené jednočasticové stavy s rozdielom energií E a menším.

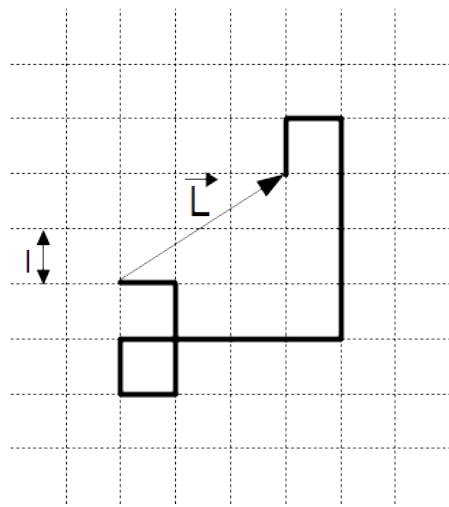
Tieto dva príklady boli v písomkách ako bonusové.

Príklad 13. Majme nasledujúci model dvojrozmerného polyméru. Molekula je retiazka N paličiek dĺžky l . Každá palička má povolené štyri rôzne orientácie, ako na obrázku. Orientácie všetkých paličiek sú nezávislé, takže sa môžu ľubovoľne prekrývať a pretínať. Molekula je v rovnováhe s prostredím s teplotou T .

- Ukážte, že stredná vzdialenosť koncov molekuly je $\langle \vec{L} \cdot \vec{L} \rangle = Nl^2$.

Uvažujme ďalej silu f , ktorá natáhuje molekulu v x -ovom smere. To znamená, že energia každej paličky je $-fl$ ak je orientovaná v smere sily, $+fl$ ak je orientovaná proti tomuto smeru a 0 ak je orientovaná kolmo na silu.

- Aká je stredná vzdialenosť koncov molekuly v x -ovom smere v tomto prípade?
- Ukážte, že sa molekula v režime slabšej sily $fl \ll kT$ správa ako pružina. Nájdite jej tuhosť.
- Molekulu izotermicky natiahneme na 1.05 násobok jej pokojovej dĺžky. O koľko sa zväčší jej voľná energia?



Príklad 14. Majme Carnotov stroj s ohrievačom počiatocnej teploty T_+ a chladičom počiatocnej teploty T_- . Avšak oba tieto objekty sú konečné a majú tepelnú kapacitu C , čo znamená že pri behu stroja sa ich teploty budú približovať, až kým sa nevyrovnejú. Aká bude

- výsledná teplota oboch telies,
- práca, ktorú počas svojej životnosti stroj vykoná,
- jeho účinnosť?