Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia

cviko bolo 27.4.2021 *Langevin, Fokker, Planck, Brown*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

- Langevinova rovnica
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \alpha\vec{v} + \vec{f}$$
$\vec{F}$ je vonkajšia sila (deterministická), $\vec{f}$ je náhodná sila

- biely šum
$$\langle f_i(t)\rangle = 0\ ,\ \langle f_i(t_1)f_j(t_2)\rangle \sim \delta_{ij}\delta(t_2 - t_1)$$
a všetky vyššie triviálnou kombináciou týchto dvoch

- Fokker-Planckova rovnica
$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\frac{\gamma}{m}v - \frac{1}{m}F(x)\right)P\right] + \frac{g}{m^2}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$$
kde $P(x, v, t$ je hustota pravdepodobnosti vo fázovom priestore

Príklad 1 (■ Voľná aristotelovská častica)**.** Nájdite strednú polohu a disperziu polohy voľnej častice v extrémne odporovom prostredí (tj. v prípade, kedy môžme zobrať $m \to 0$).

Príklad 2 (■ Voľná častica)**.** Nájdite strednú rýchlosť a koreláciu medzi zložkami rýchlosti častice popísanej úplnou rovnicou. Nájdite strednú hodnotu kinetickej energie častice.

Nájdite tiež strednú polohu a disperziu polohy takejto častice.

Príklad 3 (Einsteinov vzťah)**.** Z výsledku predchádzajúcej úlohy pre strednú kinetickú energiu častice odvoďte Einsteinov vzťah medzi koeficientom difúzie, koeficientom odporu a teplotou.

Príklad 4 (■ Komplikovanejší súbor častíc)**.** V predchádzajúcich príkladoch sme uvažovali súbor častíc, ktoré všetky začínali v ostro definovanom bode s ostro definovanou rýchlosťou. Ako sa zmení výsledok prvých dvoch príkladov, keď začneme so súborom častíc, v ktorom bude rýchlosť rozdelená gaussovsky?

Príklad 5 (Aristotelovská častica na pružine)**.** Majme časticu v extrémne odporovom prostredí, ktorá sa nachádza na pružine, tj. pod vplyvom vonkajšej sily $\vec{F} = -k\vec{x}$. Nech častica štartuje z fixovanej polohy mimo rovnováhy.

Pre časticu nájdite strednú polohu a disperziu polohy. Nájdite tiež koreláciu polôh a rýchlostí.

Príklad 6 (Častica na pružine)**.** Podobne ako v predchádzajúcom príklade, ale pre časticu popísanú úplnou rovniciou.

Príklad 7 (Odvodenie F-P rovnice z L rovnice)**.** Z Langevinovej rovnice pre $\rho(x, v, t)$ odvodte Fokker-Planckovu rovnicu pre $\langle\rho(x, v, t)\rangle_\xi = P(x, v, t)$.

Návod. Časť 7.3.2 v Reichlovej a cesta od (7.20) po (7.33). Citujem "the derivation of $P(x, v, t)$ is straightforward and very instructive" :-).

Príklad 8 (Exercise 7.1)**.** Electrons in an electrical circuit at temperature T undergo Brownian motion (thermal agitation) which is a fundamental source of noise in such circuits. Consider the simple circuit shown in the figure, which consists of a capacitor C in parallel with a resistor R. Electrons in the resistor provide a fluctuating current $i(t)$, whose average is zero $\langle i(t)\rangle = 0$ but whose fluctuations about the average are delta-correlated $\langle i(t+\tau)i(t)\rangle_i = g\delta(\tau)$, where g is the noise strength. By the equipartition theorem, the average electrical energy in the capacitor is $1/2C\left\langle V^2\right\rangle_T = 1/2k_BT$.

a. Compute the noise strength g.

b. Compute the voltage correlation function $\langle\langle V(t_2)V(t_1)\rangle_i\rangle_T$.

Príklad 9 (Exercise 7.3)**.** Solve the Fokker–Planck equation for the probability distribution $P(x,t)$ of a Brownian particle of mass m in a fluid with strong friction γ in a harmonic potential $V(x) = 1/2kx^2$, where k is the harmonic force constant. Assume that $P(x,0) = \delta(x - x_0)$.

Príklad 10 (Rozdelenie pravdepodobnosti pre biely šum)**.** Rozmyslite si, že kedže $\vec{f}(t)$ je náhodná funkcia, rozdelenie pravdepodobnosti je v tomto prípade funkcionál $P[\vec{f}(t)]$. Tiež si rozmyslite, že ak $x_f(t)$ je riešenie Langevinovej rovnice pre silu $\vec{f}(t)$, potom stredná hodnota veličiny $g[x]$ je funkcionálny integrál

$$\langle g\rangle = \int D\vec{f}\, g(x_f)P[\vec{f}]\ .$$

Ukážte, že pre biely šum

$$P[\vec{f}(t)] = Ne^{-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t)}{2\sigma^2}}\ ,$$

kde σ^2 súvisí s konštantou úmernosti (ako?) v $\langle f_i f_j\rangle$ a N je normovacia konštanta. Ide teda o zovšeobecnenie Gaussovského rozdelenia.

Návod. Generujúci funkcionál

$$Z[\vec{J}] = \int Df\, P[f]e^{\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}\cdot\vec{f}}\ .$$