Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia

cviko bolo 23.2.2021 *pravdepodobnosti a Bayesovská štatistika*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1 (Pravdepodobnosti 1). Pri ceste pozorujete dopravu, ktorá prechádza okolo. Autobusy okolo vás prechádzajú v pravidelných intervaloch každých 5 minút. Autá okolo vás prechádzajú náhodne, pričom za malý čas dt je pravdepodobnosť že okolo vás prejde auto dt/τ, kde $\tau = 5min$.

a. Ukážte, že priemerný počet áut, ktoré okolo vás prejdú za jednu hodinu je 12.

b. Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne n autobusov? Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne n áut?

c. Aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny Δ_B, ktorá je časom medzi dvomi po sebe idúcimi autobusmi? Aké je rozdelenie tejto veličiny Δ_A pre autá?

d. Ak prídeme na cestu v náhodnom čase, aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny δ_B, ktorá meria čas do príchodu najbližšieho autobusu? Aké je rozdelenie tejto veličiny δ_A pre autá?

Príklad 2 (Pravdepodobnosti 2). Klasický harmonický oscilátor s vlastnou frekvenciou ω má energiu E. Na oscilátor sa pozrieme v náhodnom časovom okamihu jeho vývoja. Aké je rozdelenie pravdepodobnosti $\rho(x)$ jeho polohy? T.j. s akou pravdepodobnosťou sa v tomto okamihu nachádza v intervale $(x, x + dx)$?

Príklad 3 (Rozdelenia pravdepodobnosti). Pre nasledujúce rozdelenia pravdepodobnosti jednej náhodnej premennej nájdite normalizačnú konštantu, charakteristickú funkciu, n-tý moment a varianciu.

$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (0,1) \tag{1}$$
$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (-1,1) \tag{2}$$
$$\text{rovnomerné na intervale } (a,b) \tag{3}$$
$$\blacksquare \sim \sqrt{1-x^2} \text{ (polkruhové)} \tag{4}$$
$$\sim e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \text{ (Gauss)} \tag{5}$$
$$\sim x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \text{ (Weibull)} \tag{6}$$
$$\sim \frac{1}{2+e^x+e^{-x}} \tag{7}$$
$$\sim \frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

Príklad 4 ($\blacksquare$ Rozdelenie v premennej x^2). Pre rozdelenia (1-4) z príkladu 3 nájdite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $y = x^2$.

Príklad 5 (Dvojrozmerný Gauss 1). Majme dve náhodné premenné x, y, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-x^2-y^2-xy} \ .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

Príklad 6 ($\blacksquare$ Dvojrozmerný Gauss 2). Majme dve náhodné premenné x, y, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \ .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé. Nájdite rozdelenie pravdepodobnosti premenných

$$v = x + y \ , \ w = x - y$$

a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

Príklad 7 (Multi-Gauss)**.** Majme n náhodný premenný $(x_1, \dots, x_n) = x$, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{1}{2}x^T M x} \ ,$$

kde M je zadaná symetrická matica. Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, ktoré z premenných x sú nezávislé.

Príklad 8 (■ Binomické → Poisson)**.** Ukážte, že binomické rozdelenie prejde v limite veľkého počtu pokusov ($n \to \infty$) ale konečnej strednej hodnoty (tj. $np = const = \lambda$) na Poissonove rozdelenie s patričnou strednou hodnotou

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ .$$

Príklad 9 (■ Poisson → Gauss)**.** Rozmyslite si, že pre prípad Poissonovho rozdelenia v limite veľkej strednej hodnoty očakávame, že náhodná premenné sa bude dať vyjadriť v tvare

$$k = \lambda + \sqrt{\lambda} x \ ,$$

kde x je nová náhodná premenná pre ktorú očakávame konečné rozdelenie pravdepodobnosti. Ukážte, že takéto x je potom v limite $\lambda \to \infty$ dané Gaussovským rozdelením s $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Rozmyslite si, ako by vyzeralo rozdelenie náhodnej premennej y, ktorú by sme zadefinovali ako $k = \lambda + y$.

Príklad 10 (Náhodné generátory 1)**.** Nájdite predpis, ako za pomoci generátora rovnomerne rozdelených náhodných čísel z intervalu $(0, 1)$ vyrobiť náhodný generátor náhodných čísel daných rozdelením (3,4,8) z príkladu 3.

Príklad 11 (■ Generátor náhodného smeru)**.** Nájdite generátor náhodného smeru z generátora dvoch rovnomerne rozdelených náhodných čísel ξ, η na intervale $(0, 1)$. Výsledkom by teda mali byť uhly θ, ϕ, ktoré budú reprezentovať rovnomerne rozdelený náhodný smer v troch rozmeroch.

Zovšeobecnite tento postup na n-rozmerný prípad a z náhodných čísel rovnomerne rozdelených na intervale $(0, 1)$ vyrobte náhodný smer v n-rozmernom priestore.

Príklad 12 (Náhodné generátory 2)**.** V nejakom programe náhodné generátory z príkladov 10 a 11 naprogramujte. Vygenergujte vašim programom veľa čísel, zobrazte histogram výsledkov a overte, že robia naozaj to, čo by mali.

Bayesov vzorec

$$P(M_i|\mathcal{D}) = \frac{\pi(M_i) P(\mathcal{D}|M_i)}{\sum_i \pi(M_i) P(\mathcal{D}|M_i)} \ ,$$

kde M_i označuje rôzne modely (možnosti), $\mathcal{D}$ označuje pozorované/nové dáta, $\pi(M_i)$ označuje našu apriórnu pravdepodobnosť pre daný model (ako veľmi si myslíme, že realita popisovaná modelom M_i), $P(\mathcal{D}|M_i)$ označuje pravdepodobnosť, že dáta $\mathcal{D}$ sú dôsledkom modelu M_i a $P(M_i|\mathcal{D})$ je nové (posteriórne) rozdelenie pravdepodobnosti na možných modeloch, ktoré berie do úvahy nové dáta. Schematicky teda[1]

$$\pi(M_i) \xrightarrow{\mathcal{D}} P(M_i|\mathcal{D}) \ .$$

Tu je kľúčový pohľad na pravdepodobnosť ako na modelovanie nevedomosti. My nevieme, aký model M_i je v skotočnosti realizovaný a túto nevedomosť modelujeme rozdelením pravdepodobnosti π. Získame o svete nové informácie $\mathcal{D}$ a rozmýšľame, ako tieto informácie menia našu predstavu o realite.

Príklad 13 (■ Frekvencionistická minca)**.** Máme mincu, o ktorej si nie sme istý, že je férová. Urobíme teda experiment, mincu n krát hodíme a dostaneme n_1 krát znak.

a. Za akých podmienok o minci vyhlásime, že férová nie je?

b. Po koľkých hodoch odhalíme úplne neférovú mincu s $p = 1$?

Príklad 14 (■ Bayesovská minca)**.** Máme mincu, o ktorej si nie sme istý, že je férová a na overenie tohto faktu urobíme rovnaký experiment ako v predchádzajúcej úlohe. Avšak vyhodnocujeme ho Bayesovsky. To znamená, že na začiatok uvažujeme, že o minci nemáme žiadnu informáciu.

a. Čo môžme na základe experimentu o minci usúdiť?

[1] Toto je moje obľúbené vyjadrenie Bayesovho vzorca.

b. Aká bude očakávaná neférovosť mince $\langle p \rangle$? (pre férovú mincu $p = 1/2$)

c. Ako bude vyzerať študovanie úplne neférovej mince?

Príklad 15 (Kruto aktuálny príklad)**.** Nech je špecificita Ag testu 0.99, tj. zdravý človek dostane s pravdepodobnosťou 99% negatívny výsledok a s pravdepodobnosťou 1% pozitívny výsledok. Ďalej nech je senzitivita Ag testu 0.4, tj. chorý človek dostane s pravdepodobnosťou 40% pozítívny výsledok a s pravdepodobnosťou 60% pozítívny výsledok.

Najskôr sa zmyslite nad tým, aké sú rozumné rozdelenia apriórnej pravdepodobnosti pre stav človeka, ktorý má príznaky a ktorý nemá príznaky.

Majme teraz človeka, ktorý ide na dva Ag testy za sebou, ktorých výsledky sú

- negatívny, negatívny,
- negatívny, pozitívny,
- pozitívny, negatívny,
- pozitívny, pozitívny.

Čo viete povedať o stave človeka, ktorý bol pôvodne bez príznakov / s príznakmi, po týchto výsledkoch?

Príklad 16 (FC Beňušovce)**.** Futbalový tím [FC Beňušovce] včera hral víťazný zápas. Ak vieme, že futbalisti tohto tímu hrajú 60% zápasov večer a nočných zápasov vyhrajú 55%, ale denných iba 35%, s aku pravdepodobnosťou bol včerajší zápas večer?

Príklad 17 (Extrémne neinovatívna úloha na precvičenie)**.** Majme dve vrecia s bielymi a čiernymi guličkami, označené X a Y. Vrece X obsahuje $p_X =$ 20% bielych guličiek a vrece Y obsahuje $p_Y = 40\%$ bielych guličiek. Z náhodného vreca vytiahneme 9 guličiek, z toho 3 biele. S akou pravdepodobnosťou to bolo vrece X?

Príklad 18 (■ Spresnenie merania)**.** Meranie istej veličiny ukázalo hodnotu 10 so štandardnou odchýlkou 7 (Gaussovské rozloženie). Chceme túto hodnotu spresniť a preto zoberieme merací prístroj, na ktorom sa dočítame, že preň $\sigma = 4$ a urobíme dve nové merania. Dostaneme výsledky 4 a 6. Čo vieme o hodnote tejto veličiny povedať teraz?

Príklad 19 (Ups)**.** Meranie hmotnosti častice ukázalo, že jej hmotnosť by mala byť $(-0.3 \pm 1)eV$. To ale tak nemôže byť, nakoľko hmotnosť je určite kladná. Aká je očakávaná hmotnosť častice po uvážení tohto faktu?