Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia

cviko bolo 2.3.2021 *entropie, termodynamické potenciály a aplikácie*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Entropia

Príklad 1 (■ O entropií informačného zdroja.). Skúmajme rýchlosť častice plynu v jednom rozmere.

a. Aká hustota pravdepodobnosti $f_1(v)$ pre túto rýchlosť maximalizuje entropiu $S = \langle \log f_1 \rangle_{f_1}$, ak je daná stredná veľkosť rýchlosti častice $\langle |v| \rangle = u$?

b. Aká je hustota pravdepodobnosti $f_2(v)$ pre túto rýchlosť maximalizuje entropiu S, ak je daná stredná kinetická energia častice $\left\langle mv^2/2 \right\rangle = mu^2/2$?

c. Ktorá z týchto dvoch informácií nám poskytuje viac informácií o rýchlosti častice? (Zaujíma nás teda rozdiel výsledných entropií v oboch prípadoch.)

Príklad 2 (O entropií čiernej diery.). Entropia čiernej diery je priamo úmerná druhej mocnine jej hmotnosti. Aká je závislosť jej teploty a jej tepelnej kapacity od hmotnosti?

Príklad 3 (Extremalizovanie entropie bez väzieb.). Ukážte, že extremalizovaním entropie dostaneme rovnomerné rozdelenie (mikrokanonické) a že Lagrangeov multiplikátor súvisí s entropiou.

Príklad 4 (Extremalizovanie entropie s väzbou na strednú energiu.). Ukážte, že extremalizovaním entropie pri fixovanej strednej hodnote energie dostávame kanonické rozdelenie a že Lagrangeov multiplikátor súvisí s teplotou.

Príklad 5 (Extremalizovanie entropie s väzbou na strednú energiu a disperziu energie.). Ukážte, že extremalizovaním entropie pri fixovanej strednej hodnote energie a strednej hodnote disperzie energie dostávame nejaké divné rozdelenie. S čim v tomto prípade súvisí Lagrangeov multiplikátor?

Vlastnosti termodynamických potenciálov

Príklad 6 (■ Maxwellove vzťahy - odvodzovátka 1). Máme nasledujúe štyri termodynamické potenciály

- energia $E(S, V)$

$$dE = TdS - pdV \ , \tag{1}$$

- voľná energia $F(T, V)$

$$F = E - TS \ , \tag{2}$$
$$dF = -SdT - pdV \ , \tag{3}$$

- Gibbsova voľná energia $G(T, p)$

$$G = F + pV \ , \tag{4}$$
$$dG = -SdT + Vdp \ , \tag{5}$$

- entalpia $H(S, p)$

$$H = E + pV \ , \tag{6}$$
$$dH = TdS + Vdp \ . \tag{7}$$

a. Ujasnite si, ako vznikajú vzťahy pre zmenu každého potenciálu a za akých podmienok je každý z potenciálov zaujímavý.

b. Ujasnite si, s akými deriváciami akých potenciálov súvisia fyzikálne veličiny.

c. Z komutovania druhých parciálnych derivácií odvoďte štyri Maxwellove vzťahy.

Príklad 7 (Identity pre derivácie - odvodzovátka 2). Majme tri premenné x, y, z, ktoré závisa

$x(y,z), y(x,z), z(x,y)$. Ukážte, že pre parciálne derivácie platí

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z =1 \ , \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y = -\,1 \ . \tag{9}$$

Rozmyslite si, že prvý vzťah je dôsledkom vety o derivovaní inverznej funkcie a druhý vety o derivovaní implicitne zadanej funkcie. Prečo sa v prvom vzťahu d-čka krátia, ale v druhom nie?

Aplikácie termodynamických vzťahov

Príklad 8 (■ Ukážte, že)**.**

$$\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T =T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V - p \ , \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial p}\right|_T = -\,T \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p - p \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \ , \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial C_V}{\partial V}\right|_T =T \left.\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right|_V \ , \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial C_p}{\partial p}\right|_T = -\,T \left.\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right|_p \ . \tag{13}$$

Príklad 9 (Zovšeobecnený Mayerov vzťah)**.** .

a. Rozmyslite si, že nasledujúce dve definície sú rozumné

$$C_V = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V \ , \ C_p = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_p \ . \tag{14}$$

b. Nájdite rozdiel $C_p - C_V$ vyjadrený cez derivácie stavových veličín, ktoré sa dajú získať zo stavovej rovnice $p = f(V,T)$.

c. Ukážte, že pre stavovú rovnicu ideálneho plynu dostaneme dobre známy výsledok.

Príklad 10 (Adiabatický dej top-to-bottom)**.** Majme ideálny plyn so známou stavovou rovnicou a vťahom pre C_V

$$C_V = \alpha N k \ . \tag{15}$$

a. Čomu sa rovná C_p a entropia?

b. Ukážte, že pre adiabatický dej platí VT^α a pV^γ sú (rôzne) konštanty.

Príklad 11 (■ Neideálny plyn)**.** Ukáže, že ak má plyn konštantné tepelné kapacity C_V, C_p, potom je jeho stavová rovnica

$$(C_p - C_V)\, T = (p+a)\,(V+b) \ , \ a, b = \text{const} \ . \tag{16}$$

Čomu sa rovná energia a entropia ako funkcia V a T.

Návod. Rovnice (12,13).

Príklad 12 (Van der Wallsov plyn)**.** Ako vyzerajú tepelné kapacity a Mayerov vzťah pre plyn, ktorého stavová rovnica je

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT \ . \tag{17}$$

Pomôže zistiť, že energia plynu sa dá zapísať v tvare

$$E = cT - \frac{a}{V} \ , \tag{18}$$

kde c je konštanta. Čomu sa rovná entropia ako funkcia V a T.

Príklad 13 (Dietericiho plyn)**.** Ako vyzerajú tepelné kapacity a Mayerov vzťah pre plyn, ktorého stavová rovnica je

$$p = \left(\frac{kT}{V/N - b}\right) e^{-\frac{aN}{VkT}} \ . \tag{19}$$

Čomu sa rovná energia a entropia ako funkcia V a T.

Príklad 14 (Neznáma hmota)**.** Stavová rovnica neznámej hmoty je daná vzťahom

$$p = A\frac{T^3}{V} \ , \ A = \text{const} \ . \tag{20}$$

Aká je jej energia?

Príklad 15 (Neznámy systém)**.** Gibbsova voľná energia pre neznámy systém je daná vzťahom

$$G = RT \log\left(\frac{ap}{(RT)^{5/2}}\right) \ . \tag{21}$$

Vypočítajte jeho tepelné kapacity a zistite, o aký systém ide.

Príklad 16 (■ Termodynamika spinovej retiazky)**.** Majme retiazku N spinov, ktoré sa nachádzajú v magnetickom poli B a navzájom neinteragujú. Energia každého spinu je

$$E = \pm\mu B \tag{22}$$

pre spin orientovaný proti smeru resp v smere magnetického poľa. Retiazka je v rovnováhe s rezervoárom s teplotou T. Magneticáziou M nazveme rozdiel medzi počtom paralelných a anti-paralelných spinov vynásobený magnetickým momentom μ.

a. Ukážte, že štatistická suma retiazky je daná vzťahom

$$Z = 2^N \left(\cosh(\beta\mu B)\right)^N \ . \tag{23}$$

Aká je stredná energia, entropia a magnetizácia retiazky?

b. Overte, že magnetizácia je konjugovanou silou k magnetickému poľu. Nájdite stavovú rovnicu pre retiazku, t.j. vzťah

$$M = f(B, T, N) \ . \tag{24}$$

c. Ako pre retiazku vyzerá Mayerov vzťah?