Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 2.3.2021 *entropie, termodynamické potenciály a aplikácie*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Entropia

Príklad 1 (■ O entropií informačného zdroja.). Príklad je vypočítaný vo videou.

Príklad 2 (O entropií čiernej diery.).

Príklad 3 (Extremalizovanie entropie bez väzieb.). Podobne ako v prvej úlohe, kľúčom je počítanie s Lagrangeovym multiplikátorom. Budeme hľadať extrém lagrangiánu

$$L = -k \sum p_i \log p_i + \alpha \left(1 - \sum_i p_i\right) ,$$

kde "pohybová" rovnice pre α zariadi platnosť väzby. Z Euler-Lagrangeovych rovníc dostávame

$$-k\left(\log p_i + 1\right) - \alpha = 0$$

z čoho $\log p_i = const$ a z normalizácie $p_i = 1/N$. Z definičného vzťahu pre entropiu dostávame, že $S = k + \alpha$.

Príklad 4 (Extremalizovanie entropie s väzbou na strednú energiu.). Podobne ako v prechúcej úlohe. Funkciu Lagrangeovho multiplikátora prezradí jeho pozícia vo výslednom rozdelení pravdepodobnosti.

Príklad 5 (Extremalizovanie entropie s väzbou na strednú energiu a disperziu energie.). Opäť počítame s Lagrangeovými multiplikátormi.

Vlastnosti termodynamických potenciálov

Príklad 6 (■ Maxwellove vzťahy - odvodzovátka 1). Z veľkej časti sa robilo na prednáške a je spravené vo videu.

Príklad 7 (Identity pre derivácie - odvodzovátka 2). Odvodené na prednáške. Druhý zo vzťahov je vlastne prezlečená veta o implictne danej funkcii, ktorá hovorí, že ak máme zadaný vzťah $F(x, y) = 0$ a sú splnené nejaké predpoklady slušnosti, potom existuje funkcia $y = f(x)$, pre ktorej deriváciu platí

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} .$$

Aplikácie termodynamických vzťahov

Príklad 8 (■ Ukážte, že). Vo všetkých takýchto úlohách je dôležité pamätať na to, že keď máme napísane, že čosi je funkcia nejakých dvoch premenných $A(x, y)$, ešte to neznamená, že x a y sú nezávislé. Jedna z nich, napríklad y, môže byť funkciou druhej a potom

$$\frac{dA(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial A}{\partial x} + \left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_x \cdot \frac{dy}{dx} .$$

Asi sa zíde aj tvrdenie o vzťahu medzi tepelnými kapacitami a entropiu z nasledujúceho príkladu.

Príklad 9 (Zovšeobecnený Mayerov vzťah).

a. Pre vratné zmeny $\delta Q = tdT$ a tepelná kapacita je $\delta Q/dT$.

b. Vo výsledku sa budú objavovať iba response functions (funckie odozvy) systému. Pri úpravách ich skúste hľadať, ak vám to nepôjde, sú to koeficient tepelnej rozťažnosti α, ktorý hovorí o relatívnej zmene objemu pri malej zmene teploty pri konštantnom tlaku, a koeficient stlačiteľnosti β, ktorý hovorí o relatívnej zmene objemu pri malej zmene tlaku pri konštantnej teplote. Ak sa vám nebude dariť z tohto opisu definície koeficientov vymyslieť, skúste ich vyhľadať.

c. Výpočet ukáže.

Príklad 10 (Adiabatický dej top-to-bottom).

Príklad 11 (■ Neideálny plyn). Úplné riešenie je vo videu.

Príklad 12 (Van der Wallsov plyn). Nasledujúce tri príklady ilustrujú silu "odvodzovátok". Zo stavovej rovnice, tj. z niečoho, čo vieme získať v laboratóriu meraním makroskopických vlastností systému na základne kontrolovaných zmien, vieme určiť experimentálne nedostupné veličiny ako energia a entropia. Z nich budeme vedieť čosi povedať o mikroskopickej fyzike v systéme použitím metód štatistickej fyziky.

Príklad 13 (Dietericiho plyn).

Príklad 14 (Neznáma hmota).

Príklad 15 (Neznámy systém). Gibbsova voľná energia pre neznámy systém je daná vzťahom

$$G = RT \log \left(\frac{ap}{(RT)^{5/2}} \right) . \tag{1}$$

Vypočítajte jeho tepelné kapacity a zistite, o aký systém ide.

Príklad 16 (■ Termodynamika spinovej retiazky). Príklad najmä na ilustráciu toho, ako to funguje v situácii, ked nie je zovšeobecnenou silou tlak a zovšeobecnenou spradnicou objem. Riešenie vo videu.