Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia - návody a komentáre

cviko bolo 16.3.2021 *fázové prechody, matica hustoty, klasická štatistická fyzika*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Kritické koeficienty v Landauovej teórii

Príklad 1 (■ Landauove kritické koeficienty). Riešenie príkladu je vo videu.

Príklad 2 (Zložitejší Landau). V tomto prípade je dôležité, že dôjde k nespojitému fázovému prechodu ked namiesto hodnoty $M = 0$ začne byť minimom nenulová hodnota skokom. Výpočet kritických exponentov je podobný ako v prechádzajúcej úlohe.

Matica hustoty

Príklad 3 (Matica hustoty pre dvoj hladinový systém.). Časti a. a b. sú vyriešené vo videu, časť c. je priamočiara zmena bázy.

Príklad 4 (O matici hustoty.). Dôležitá časť príkladu je vyrišená vo videu, prvé dve časti sú priamočiarou manipuláciou s bra a ket vektormi.

Príklad 5 (Entropia kanonického súboru a matica hustoty.). V tejto úlohe komplikácia v logaritme matice. Pre diagonalnu maticu môžeme písať jednoducho

$$\log A = \log \sum_n |n\rangle A_n \langle n| = \sum_n |n\rangle \log A_n \langle n| \ .$$

Pre nediagonálnu maticu je to nejde až tak priamočiaro, ale ak sa matica diagonalizovať dá $A = U\Lambda U^{-1}$ (kde Λ je diagonálna matica vlastných hodnôt matice A), potom

$$\log A = \sum_i \frac{(-1)^i}{i} A^i = U \left(\sum_i \frac{(-1)^i}{i} \Lambda^i \right) U^{-1} = \\ = U \log \Lambda U^{-1} \ .$$

Tak či tak už si len stačí spomenúť na definúciu voľnej energie skrz $\log Z$ a spraviť zopár úprav.

Klasická štatistická fyzika

Príklad 6 (Gibbsov paradox revisited). Tu je väčšina dôležitých vecí spomenutá v zadaní. Napríklad pre $N = 2$ sú pre rozlíšiteľné častice mikrostavy $(0, E)$ a $(E, 0)$ dva rôzne stavy prispievajúce rovnocenne do štatistickej sumy, v prípade nerozlíšiteľných častíc ide o jeden a ten istý mikrostav ktorý do štatistickej sumy prispieva jedným členom.

Rozdiel medzi mikrostavmi rozlíšiteľných a nerozlíšiteľných častíc je teda v stiuáciách, kedy častice sedia v rôznych jednočasticových stavoch. Ak sú v tom istom jednočasticovom stave, tak takáto konfigurácia prispieva rovnako do štatistickej sumy pre oba druhy častíc.

Treba teda nájsť spôsob, ako zo štatistickej sumy pre rozlíšiteľné častice odstrániť mikrostavy, ktoré pre nerozlíšiteľné častice neprispievajú. Faktor $N!$ to robí tak, že každej permutácií častíc priraďuje váhu iba jedného mikrostavu a nie všetkých $N!$ mikrostavov. Ale pozor, nie všetky permutácie vyrábajú nový mikrostav aj pre rozlíšiteľné častice. Konfigurácie, kde sú niektoré z nich v tom istom jednočasticovom stave treba vydeliť iným (menším) faktorom. Týchto konfigurácií je ale v limite $N \to \infty$ zanedbateľne málo a finte teda (približne) funguje.

Príklad 7 (■ Viriálový rozvoj). Všeobecnejšie sa dá na tento postup pozerať tak, že z grandkanonického súboru vypočítame $p/kT = \ldots$ a $N/V = \ldots$, kde pravé strany závisa od chemického potenciálu μ. Ten ale nevieme, máme zadaný (stedný) počet častíc N. Druhú rovnicu teda potrebujeme obrátiť, vyjazdiť z nej chemický potenciál ako funkciu N a potom dosadiť do prvej rovnice. Vzťah $\mu(N/V)$ ale nejde analyticky a dokážeme ho získať iba iba poruchovo v mocnínách N/V, odkiaľ potom dostaneme poruchový rad v tých istých mocninách pre p/kT.

Prvý virálový koeficient je jednoducho 1 z toho, ako vyzerá stavová rovnica ideálneho plynu.

Príklad 8 (Druhý viriálový koeficient 1)**.** Keď sa robí rozvoj $f(r)$ pre malé $V(r)$ dostaneme výsledný integrál v tvare

$$\int dr\, r^2 V(r) \ .$$

Ten konverguje pre $V(r) \sim r^{-3+\varepsilon}$, tak6e potebujeme n menšie ako -4. Všimnite si, že napríklad elektrostatické priťahovanie podľa Coulombovho zákona je zúfalo silné. Ak chceme takto popisovať plyn častíc, tie musia byť elektricky neutrálne a sily medzi nimi musia vznikať nejakou multipólovou interakciou.

Príklad 9 (■ Nečakaný faktor 2 pre biliardové gule)**.** Úloha je vypočítaná vo videách.

Príklad 10 (■ Druhý viriálový koeficient 2)**.** Úloha je vypočítaná vo videách.

Príklad 11 (Tretí viriálový koeficient)**.** Technicky náročnejšia úloha, k riešeniu ktorej sa ale dá dogoogliť.

Príklad 12 (Viriálny Mayerov vzťah)**.** Technicky náročnejšia úloha, k riešeniu ktorej sa ale dá dogoogliť.