

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 13.4.2021

Akkoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1. Zopakujte výpočet štatistickej sumy dráhovým integrálom z prednášky pre prípad bozónového harmonického oscilátora.

Príklad 2 (Opakovanie z prednášky I). Dokážte, že pre n -rozmerný vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \times n$ maticu A platia nasledujúce vzťahy a n -rozmerný vektor $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}},$$
$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T \cdot A^{-1} \vec{b}}.$$

Rozmyslite si, ako to zovšeobecňuje jednorozmerný prípad.

Príklad 3 (Opakovanie z prednášky II - Wickova veta). Presvedčte sa, že pre l bodovú funkciu platí

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l} \rangle = \left. \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} e^{\frac{1}{2}\vec{b}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{b}} \right|_{\vec{b}=0},$$

kde

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\int d^n x e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}}} \int d^n x f(\vec{x}) e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}}.$$

Dopočítajte pravú stranu a nájdite všeobecný recept, ako ju zapísať pomocou párování súradnic vektora \vec{x} v strednej hodnote. Ako táto situácia vyzerá diagramaticky?

Pomôže začať s najjednoduchším prípadom $l = 4$, potom $l = 6$ a tak si rozmyslieť všeobecný prípad.

Príklad 4 (Použitie v jednorozmernom prípade). Majme nasledovný integrál

$$Z = \int dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{g}{4!}x^4}.$$

Zaujímá nás, ako sa tento integrál správa pre malé hodnoty parametra g . Zapište rozvoj Z v mocninách g pomocou stredných hodnôt v gaussovskom rozdelení a vypočítajte prvé tri členy tohto rozvoja využitím Wickovej vety.

Nájdite tiež diagramy, ktoré zodpovedajú jednotlivým členom.