Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia - komentáre

cviko bolo 13.4.2021

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1.

Príklad 2 (Opakovanie z prednášky I). Na výpočet prvého integrálu si uvedomíme, že maticu A môžeme diagonalizovať a zapísať pomocou ortogonálnej matice O ako

$$A = O^T \Lambda O \ ,$$

kde Λ je diagonálna matica vlastných hodnôt matice A. Potom môžeme prejsť od integrácii cez vektor $\vec{x}$ k integrovaniu cez vektor $\vec{y} = O\vec{x}$ a cena, ktorú zaplatíme za tento prechod je jednotkový jakonián $\det O = 1$. V premennej $\vec{y}$ už ide iba o súčin jednorozmerných integrálov

$$\left[\int dy_1\, e^{-\frac{1}{2}y_1\lambda_1 y_1}\right]\ldots\left[\int dy_n\, e^{-\frac{1}{2}y_n\lambda_n y_n}\right] \ ,$$

ktorý sa rovná

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_1}}\cdots\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} \ .$$

Súčin vlastných hodnôt v menovateli je determinant matice a dostávame želaný výsledok. Rozmyslite si, čo by sa pokazilo a ako by sa to opravilo keby niektorá z vlastných hodnôt matice A bola nulová.

Pre odvodenie druhého vzťahu použijeme ten istý postup s tým, že do súčinu $\vec{x}\cdot\vec{b}$ dorobíme maticu O, čím dostaneme

$$\left[\int dy_1\, e^{-\frac{1}{2}y_1\lambda_1 y_1 + y_1 b'_1}\right]\cdot\ldots\cdot\left[\int dy_n\, e^{-\frac{1}{2}y_n\lambda_n y_n + y_n b'_n}\right]$$

kde $\vec{b}' = O\cdot b$. Pre každý z týchto integrálov platí

$$\int dy_i\, e^{-\frac{1}{2}y_i\lambda_i y_i + y_i b'_i} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} e^{\frac{b'_i}{2\lambda_i}} \ .$$

Dostávame teda

$$\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{b'^2_i}{\lambda_i}} \ .$$

To ešte trochu prepíšeme

$$\sum_{i=1}^n \frac{b'^2_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n b_j (O^T)_{ji} \frac{1}{\lambda_i} O_{ik} b_k$$

a v tomto zápise už nie je ťažké spozorovať hľadaný výsledok. Stačí si rozmyslieť, že inverznú maticu A^{-1} diagonalizuje tá istá matica O a jej vlastné hodnoty sú $1/\lambda_i$.

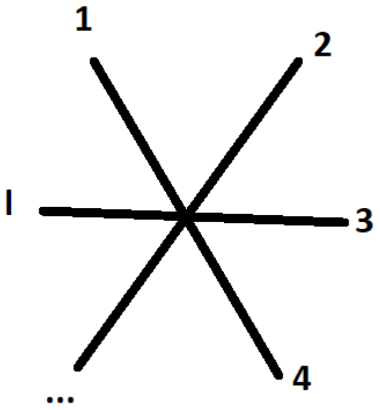
Príklad 3 (Opakovanie z prednášky II - Wickova veta). Kľúčovým slovom je derivovanie podľa parametra. Pre $l = 2$ máme

$$\langle x_i x_j\rangle = \frac{1}{Z}\int d^n x\, x_i x_j e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T\cdot A\cdot\vec{x}}$$

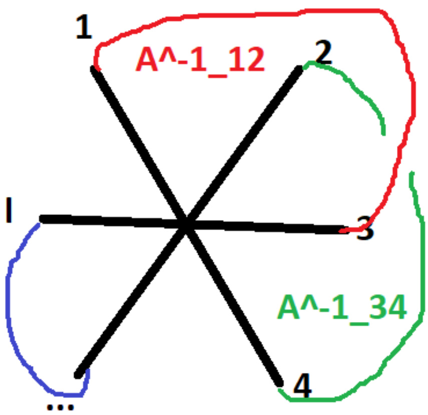
a je priamočiare si rozmyslieť, že pre nenulové $\vec{b}$ derivovanie podľa b_i znesie z exponenty práve faktor x_i. Potom už len prehodíme integrovanie s derivovaním a na záver položťime $\vec{b}$ nulové, pretože na žačiatku to tak bolo.

Na prednáške bolo potom odvodené, ako musia derivácie podľa komponent $\vec{b}$ ísť po pároch, aby na koniec nezostala osamotená mocnina x_i v strednej hodnote, ktorá vynuluje akýkoľvek črtajúci sa príspevok.

Diagramaticky sa to dá predstaviť nasledovne. Nakreslíme si l-nohú hviezdu,



kde každá noha nesie zodpovedajúci index k_i. V tejto hviezde teraz spájame nohy. Môžeme spojiť také dve nohy, ktorých indexy k_a a k_b zodpovedajú indexom s nenulovým vstupom v matici A^{-1}. A za toto spojenie tento vstup $A^{-1}_{k_a k_b}$ dostaneme ako faktor. Postpájame všetky nohy, napríklad takto



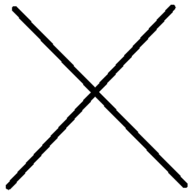
a potom zosumuje cez všetky možné pospájania nôh.

Príklad 4 (Použitie v jednorozmernom prípade). Do druhého rádu v g dostávame

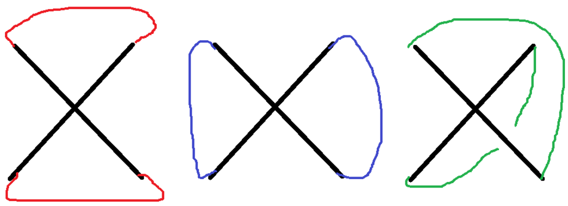
$$Z = Z_0 \left[\langle 1 \rangle + \frac{g}{4!} \langle x^4 \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{4!} \right)^2 \langle x^8 \rangle \right] ,$$

kde Z_0 označuje Z pre nulové g, ktoré vieme ľahko dopočítať.

Tieto stredné hodnoty teraz spočítame podľa predchádzajúcej úlohy. Pre $\langle x \rangle$ potredujeme spočítať všetky možné pospájania nôh v diagrame



ktoré sú



Každý z nich prichádza s dvomi faktormi $1/a$ za spojenie nôh, a teda

$$\langle x^4 \rangle = \frac{3}{a^2} .$$

Podobne dopočítame aj $\langle x^8 \rangle$, mali by ste nájsť $8!/2^4/4!$ rôznych diagramov.

Všimnite si, že tu nie je rozdiel či sa na člen v druhej strednej hodnote pozeráme ako na $x^4 x^4$ (a teda dva štvornohé obrázky vedľa seba), alebo ako na x^8 (a teda osem nohý obrázok. To preto, že počítame štatistickú sumu Z a nie voľnú energiu $F \sim \log Z$. Vo voľnej energii to už ale bude rozdiel, skúste si spomenúť na QFT, kde sa vysvetľovalo prečo to tak je. Kľúčové tu je to, ako exponenciovaním spojitých diagramov dostaneme aj nespojité diagrami.