Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia

cviko bolo 24.3.2022 *entropie, spinové modely*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Entropia

Príklad 1 (■ O entropií informačného zdroja.). Skúmajme rýchlosť častice plynu v jednom rozmere.

a. Aká hustota pravdepodobnosti $f_1(v)$ pre túto rýchlosť maximalizuje entropiu $S = \langle \log f_1 \rangle_{f_1}$, ak je daná stredná veľkosť rýchlosti častice $\langle |v| \rangle = u$?

b. Aká je hustota pravdepodobnosti $f_2(v)$ pre túto rýchlosť maximalizuje entropiu S, ak je daná stredná kinetická energia častice $\langle mv^2/2 \rangle = mu^2/2$?

c. Ktorá z týchto dvoch informácií nám poskytuje viac informácií o rýchlosti častice? (Zaujíma nás teda rozdiel výsledných entropií v oboch prípadoch.)

Príklad 2 (O entropií čiernej diery.). Entropia čiernej diery je priamo úmerná druhej mocnine jej hmotnosti. Aká je závislosť jej teploty a jej tepelnej kapacity od hmotnosti?

Príklad 3 (Extremalizovanie entropie bez väzieb.). Ukážte, že extremalizovaním entropie dostaneme rovnomerné rozdelenie (mikrokanonické) a že Lagrangeov multiplikátor súvisí s entropiou.

Príklad 4 (Extremalizovanie entropie s väzbou na strednú energiu.). Ukážte, že extremalizovaním entropie pri fixovanej strednej hodnote energie dostávame kanonické rozdelenie a že Lagrangeov multiplikátor súvisí s teplotou.

Príklad 5 (Extremalizovanie entropie s väzbou na strednú energiu a disperziu energie.). Ukážte, že extremalizovaním entropie pri fixovanej strednej hodnote energie a strednej hodnote disperzie energie dostávame nejaké divné rozdelenie. S čim v tomto prípade súvisí Lagrangeov multiplikátor?

Isingov Model

Príklad 6 (■ Malá štvorcová mriežka). Nájdite štatistickú sumu pre Isingov model na štvorcovej mriežke 2×2 s periodickými okrajovými podmienkami. Aká je stredná hodnota energie pri nulovom vonkajšom poli. Aká je magnetická susceptibilita pri vysokej a pri nízkej teplote? Ako je to v prípade voľných okrajových podmienok?

Príklad 7 (Explicitný rozvoj štatistickej sumy). Nájdite niekoľko prvých členov vysoko a nízko teplotného rozvoja štatistickej sumy Isingovho modelu na

a. trojuholníkovej mriežke,

b. kubickej mriežke.

Príklad 8 (3-stavový Pottsov model). q-stavový Pottsov model je je zovšeobecnenie Isingovho modelu. V ňom na každom bode mriežky žije premenná σ s q možnými hodnotami a energia dvojice susedných bodov je úmerná $\delta_{\sigma_i,\sigma_j}$. Ukážte, že v prípade $q = 3$ je model ekvivalentný modelu s hamiltoniánom

$$H = -H \sum_{i \sim j} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \ , \tag{1}$$

kde možné hodnoty vektora $\vec{s}$ sú

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Metódou stredného poľa nájdite magnetizáciu $\langle \vec{s}_i \rangle$, voľnú energiu a ukážte, že model má fázový prechod.

Teória stredného poľa

Príklad 9 (■ Hyperkubická mriežka)**.** Nájdite kritickú teplotu Isingovho modelu na kubickej mriežke v d rozmeroch použitím aproximácie stredného poľa pri nenulovom vonkajšom poli.

Príklad 10 (■ Isingove kritické koeficienty zo stredného poľa)**.** Aké kritické koeficienty predpovedá pre Isingov model na d rozmernej kubickej mriežke metóda stredného poľa?

Príklad 11 (Widom scaling)**.** Vypočítajte kritické koeficienty vo Widomom škálovaní.

Betheho aproximácia

Príklad 12 (1D a 2D Ising model)**.** Využitím Betheho aproximácie vypočítajte kritickú teplotu pre Isingov model na jednorozmernej a dvojrozmernej mriežke.

Príklad 13 (Hyperkubická mriežka)**.** Nájdite kritickú teplotu Isingovho modelu na kubickej mriežke v d rozmeroch použitím Betheho aproximácie a najjednoduchšieho klastru.

Príklad 14 (Hexagonálna mriežka)**.** Nájdite kritickú teplotu Isingovho modelu na hexagonálnej mriežke použitím Betheho aproximácie a najjednoduchšieho klastru so štyrmi spinmi.