

# Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

## Príklady z cvičenia

cviko bolo 21.4.2022

grandkanonické rozdelenie, klasická štatistická fyzika

Akékoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

### Grandkanonické rozdelenie

**Príklad 1** (Chemický potenciál ideálneho plynu). Na prednáške sa objavil vzorec pre chemický potenciál ideálneho plynu. Rozmyslite si, že je záporný. Ako táto vec korešponduje sa tvrdením, že chemický potenciál je energia potrebná na pridanie jednej častice do systému?

**Príklad 2** (Príklad z prednášky). Zopakujte odvedenie Langmuirovej adsorbčnej rovnice pre proteíny, na ktoré sa vedia zachytiť dve molekuly kyslíka. Koľko molekúl kyslíka na daný počet molekúl proteínu, bude viesť takáto látka preniesť pri rovnakých podmienkach?

Ako by to vyzeralo pre proteín, na ktorý sa vie naviazať  $n$  kyslíkov?

**Príklad 3** (Môj obľúbený príklad o grandkanonických súboroch). Majme ideálny plyn  $N$  častíc v kockatej škatuli s hranou  $a$ . Častice sa však môžu za cenu energie  $\varepsilon$  nalepiť na jednu zo stien nádoby a tam si žiť ako plyn v dvoch rozmeroch. Koľko častíc je nalepených na stenu, ak je škatula pri teplote  $T$ ?

**Návod.** Popisujte systém grandkanonickým súborom, ale dobre si rozmyslite, za akých okolností je tento prístup rozumný.

**Príklad 4** (Začiatok viriálového rozvoja). Ak si spomínate na príklad o Viriálovom rozvoji, jeho riešenie začínalo slovami "z grandkanonického súboru vypočítame  $p/kT = \dots$  a  $N/V = \dots$ , kde pravé strany závisia od chemického potenciálu  $\mu$ ". Tento príklad od vás chce, aby ste to ožaj spravili.

### Klasická štatistická fyzika

**Príklad 5** (Gibsov paradox revisited). Pripomeňte si, čo presne robí faktor  $1/N!$  v zápise ako

napríklad  $Z_N = Z_1^N/N!$  a prečo zodpovedá nerozlišiteľnosti častíc. Rozmyslite si, že to ale platí iba v limite veľmi veľkého počtu častíc.

Môže pomôcť vypočítať  $Z_N$  v jednoduchých systémoch pre nejaké malé  $N$ . Napríklad zoberte dvojhladinový systém s energiami 0 a  $E$ .  $Z_2$  pre rozlišiteľné častice je triviálne  $(1 + e^{-\beta E})^2$ , dá sa aké dopočítať aj explicitným sumovaním cez mikrostavy dvojčasticového systému. Pre nerozlišiteľné častice už jednoduchá cesta nie je, treba zapísať všetky mikrostavy a počítat  $\sum_n e^{-\beta E_n}$ . Ukážte, že v tomto prípade  $Z_2 \neq Z_1^2/2!$ .

Skúste vypisovať povolené mikrostavy pre  $N = 3, 4, \dots$  v prípade rozlišiteľných a nerozlišiteľných častíc a na základe toho si rozmyslite, že v limite  $N \rightarrow \infty$  už ale faktor  $N!$  bude ožaj robiť to, čo má. A teda eliminovať zo sumy tie mikrostavy, ktoré sú rôzne pre rozlišiteľné častice, ale identický mikrostav pre nerozlišiteľné častice.

**Príklad 6** (■ Viriálový rozvoj). V skriptách Vlada Černého a/alebo Davida Tonga si pozrite odvedenie van der Waalsovej rovnice. Rozmyslite si, že je to príkladom viriálového rozvoja, ktorý je rozvojom stavovej rovnice do hustoty častíc

$$\frac{p}{kT} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(T) \left(\frac{N}{V}\right)^n. \quad (1)$$

Čomu sa rovná prvý viriálový koeficient?

**Príklad 7** (Druhý viriálový koeficient 1). Rozmyslite si, že pri odvedení sme dokázali, že

$$B_2(T) = -\frac{1}{2V} \int f_{12} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad (2)$$

kde  $f(r)$  je Mayerova  $f$  funkcia daná ako

$$f_{ij} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad f(r) = e^{-\beta V(r)} - 1 \quad (3)$$

a  $V(r)$  je dvojčasticový potenciál. Pre akú asymptotiku  $V \sim r^n$  keď  $r \rightarrow \infty$  je tento koeficient konečný?

**Príklad 8** (■ Nečakaný faktor 2 pre biliardové gule). Majme interakčný potenciál v tvare

$$V(R) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ 0 & r > \sigma \end{cases} . \quad (4)$$

- Rozmyslite si, o akú interakciu ide.
- Ukážte, že v takom prípade  $B_2 = 2\pi\sigma^3/3$ .
- Rozmyslite si, že to je o faktor 2 inak, ako by ste čakali.

**Príklad 9** (■ Druhý viriálový koeficient 2). Majme interakčný potenciál v tvare

$$V(R) = \begin{cases} \infty & r < \sigma \\ -V_0 & \sigma < r < 2\sigma \\ 0 & r > 2\sigma \end{cases} . \quad (5)$$

- Rozmyslite si, o akú interakciu ide.
- Vypočítajte  $B_2$  pre takýto potenciál.
- Ako vyzerá  $B_2$  pre vysoké teploty?

**Príklad 10** (Tretí viriálový koeficient). Nájdite tretí viriálový koeficient pre potenciál (4) a pre potenciál (5). Pre koeficient  $B_3$  sa dá ukázať

$$B_3(T) = -\frac{1}{3V} \int f_{12}f_{13}f_{23}d\vec{r}_1d\vec{r}_2d\vec{r}_3 . \quad (6)$$

**Príklad 11** (Viriálny Mayerov vzťah). Nájdite viriálový rozvoj rozdielu tepelných kapacít  $C_p - C_V$ .