

# Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

## Príklady z cvičenia

cviko bolo 9.5.2023

7.5, účinné prierezy, BKR

Akékoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

### 7.5 Linear Response Theory and the Fluctuation–Dissipation Theorem

**Príklad 1** (Exercise 7.4). Compute the dynamic susceptibility for a Brownian particle of mass  $m$  in the presence of white noise  $\xi(t)$  and fluid friction  $\gamma$ .

**Príklad 2** (Exercise 7.5). Verify the Kramers–Kronig relations for the dynamic susceptibility in Exercise 7.4.

**Príklad 3** (Exercise 7.6). Given the dynamic susceptibility  $\chi(\omega) = (-im\omega + \gamma)^{-1}$  for simple Brownian motion (see Exercise 7.4) and the thermal average  $\langle v^2 \rangle_T = kBT/m$ , use the fluctuation–dissipation theorem to obtain the velocity autocorrelation function.

**Príklad 4** (Exercise 7.7). Prove that  $\bar{\xi}(0) = \bar{g}^{-1}/T$ , where  $\bar{g}$  is the matrix whose matrix element is  $g_{ij} = (\partial^2 S / \partial \alpha_i \partial \alpha_j)_U$ .

### Účinné prierezy

**Príklad 5** (■ Zrážka s nehybnou guľou 1). Majme dve rovnako ťažké gule rovnakého polomeru  $R$ . Jedna je nehybne položená na stole a druhá na ňu letí. Ak je stojaca guľa pevne uchytená, ako vyzerá výraz pre diferenciálny a totálny účinný prierez?

**Príklad 6** (Zrážka s nehybnou guľou 2). Rozmyslite si, ako by sa zmenila odpoveď na predchádzajúcu otázku v prípade rôznych polomerov ale stále rovnakých hmotností.

**Príklad 7** (■ Zrážka s voľnou guľou). Rovnako ako v prvom príklade, ale stojaca guľa sa môže voľne hýbať.

**Príklad 8.** Ukážte, že pri zrážke dvoch molekúl pri prechode z laboratórnej do ťažiskovej sústavy platí

$$d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 = d\vec{u} d\vec{V}$$

kde  $\vec{u}$  je vzájomná rýchlosť molekúl a  $\vec{V}$  je rýchlosť pohybu ich ťažiska.

**Príklad 9** (Rutherfordov rozptyl 1). Nájdite diferenciálny účinný prierez pre zrážku elektrónu s hmotnosťou  $m$  a nábojom  $-e$  s jadrom zlata, ktoré je veľmi ťažké a má náboj  $Zq$  pre  $Z = 79$ . Rýchlosť elektrónu vo veľkej vzdialenosti od atómu je  $v$  a zámerný parameter je  $b$ .

Môže sa zísť riešenie Keplerovej úlohy z mechaniky pre potenciál  $V(r) = +k/r$

$$\frac{1}{r} = -\frac{mk}{L^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \cos(\theta - \theta')} \right).$$

Nájdite potom aj totálny účinný prierez.

**Príklad 10** (■ Rutherfordov rozptyl 2). Nájdite diferenciálny účinný prierez pre zrážku elektrónu s hmotnosťou  $m$  a nábojom  $-e$  s jadrom zlata, ktoré je veľmi ťažké a má náboj  $Zq$  pre  $Z = 79$ . Rýchlosť elektrónu vo veľkej vzdialenosti od atómu je  $v$  a zámerný parameter je  $b$ .

Úlohu ale neriešite pracným integrovaním pohybových rovníc, ale použitím zákonov zachovania a Runge-Lentzovho vektora.

Nájdite potom aj totálny účinný prierez.

**Príklad 11** (Dúha). Na dúhu sa dá pozeráť ako na rozptylový problém.

- Nájdite vzťah medzi imapakt parametrom  $b$  slnečného lúča a uhol rozptylu  $\theta$  pri rozptyle na guľovej kvapke vody. K rozptylu dochádza tak jedným vnútorným odrazom v kvapke. Index lomu svetla vo vode je  $n$ .
- Rozmyslite si, čo sa zmení na vzťahu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|$$

pre prípad nejednoznačného vzťahu  $b(\theta)$ .

**Návod.** Pomôže pozrieť sa na vzťah  $\theta(b)$ .

- Rozmyslite si, že takto dostaneme pre rozptyl svetla na kvapke ostrý peak v množstve prichádzajúceho svetla rozptýleného po istým uhle, ktorý závisí od  $n$  a teda od farby svetla.

- Ak vás to zaujíma, môžete skúsiť dopo-  
čítať detaily a nájsť druhorádovú dúhu,  
ktorá vzniká viacnásobným odrazom svetla  
vo vnútri kvapky.

## BKR

**Príklad 12** (■ Derivácia Maxwella). Pre Maxwell-  
love rozdelenie

$$f_0 = n(\vec{x}) \left( \frac{m\beta(\vec{x})}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\beta(\vec{x})}{2} \vec{v}^2}$$

vypočítajte  $Df_0$  v silovom poli homogénneho tia-  
žového poľa  $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ .

**Príklad 13** (izotermická a adiabatická atmo-  
sféra). Vo výsledku predchádzajúceho príkladu  
urobte predpoklad o

- izotermickej,
- adiabetickej atmosfére

a nájdite závislosť hustoty vzduchu od výšky.

**Príklad 14** (■ Viskozita kvapaliny). Aký vzťah  
dostávame z BKR pre viskozitu kvapaliny?

**Príklad 15** (■ Tepelná vodivosť). Aký vzťah do-  
stávame z BKR pre tepelnú vodivosť plynu?

**Príklad 16** (Predpoveď). Z výsledkov predchá-  
dzajúcich dvoch úloh sa dá vylúčiť parameter  $\tau$   
a dostať vzťah pre makroskopicky merateľné veli-  
činy. Urobte to a porovnajte s hodnotami pre rôzne  
plyny.

**Príklad 17** (■ Elektrická vodivosť plynu). Aký  
vzťah dostávame z BKR pre elektrickú vodivosť  
plynu?

**Príklad 18** (Elektrická vodivosť kovu). Aký  
vzťah dostávame z BKR pre elektrickú vodivosť  
plynu elektrónov v kove?

**Príklad 19** (Makroskopické zachovanie energie).  
Aká makroskopickú hydrodynamickú rovnicu do-  
stávame z BKR ak uvážime zákon zachovania ener-  
gie v zrážkach?