Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky
Príklady z cvičenia

cviko bolo 12.3.2024 *termodynamické potenciály a aplikácie*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Vlastnosti termodynamických potenciálov

Príklad 1 (■ Maxwellove vzťahy - odvodzovátka 1)**.** Máme nasledujúe štyri termodynamické potenciály

- energia $E(S,V)$

$$dE = TdS - pdV \ , \tag{1}$$

- voľná energia $F(T,V)$

$$F = E - TS \ , \tag{2}$$
$$dF = - SdT - pdV \ , \tag{3}$$

- Gibbsova voľná energia $G(T,p)$

$$G = F + pV \ , \tag{4}$$
$$dG = - SdT + Vdp \ , \tag{5}$$

- entalpia $H(S,p)$

$$H = E + pV \ , \tag{6}$$
$$dH = TdS + Vdp \ . \tag{7}$$

a. Ujasnite si, ako vznikajú vzťahy pre zmenu každého potenciálu a za akých podmienok je každý z potenciálov zaujímavý.

b. Ujasnite si, s akými deriváciami akých potenciálov súvisia fyzikálne veličiny.

c. Z komutovania druhých parciálnych derivácií odvoďte štyri Maxwellove vzťahy.

Príklad 2 (Identity pre derivácie - odvodzovátka 2)**.** Majme tri premenné x, y, z, ktoré závisa $x(y,z), y(x,z), z(x,y)$. Ukážte, že pre parciálne derivácie platí

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z = 1 \ , \tag{8}$$
$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y = - 1 \ . \tag{9}$$

Rozmyslite si, že prvý vzťah je dôsledkom vety o derivovaní inverznej funkcie a druhý vety o derivovaní implicitne zadanej funkcie. Prečo sa v prvom vzťahu d-čka krátia, ale v druhom nie?

Aplikácie termodynamických vzťahov

Príklad 3 (■ Ukážte, že)**.**

$$\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T = T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V - p \ , \tag{10}$$
$$\left.\frac{\partial E}{\partial p}\right|_T = - T \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p - p \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \ , \tag{11}$$
$$\left.\frac{\partial C_V}{\partial V}\right|_T = T \left.\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right|_V \ , \tag{12}$$
$$\left.\frac{\partial C_p}{\partial p}\right|_T = - T \left.\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right|_p \ . \tag{13}$$

Príklad 4 (Zovšeobecnený Mayerov vzťah)**.** .

a. Rozmyslite si, že nasledujúce dve definície sú rozumné

$$C_V = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V \ , \ C_p = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_p \ . \tag{14}$$

b. Nájdite rozdiel $C_p - C_V$ vyjadrený cez derivácie stavových veličín, ktoré sa dajú získať zo stavovej rovnice $p = f(V,T)$.

c. Ukážte, že pre stavovú rovnicu ideálneho plynu dostaneme dobre známy výsledok.

Príklad 5 (Adiabatický dej top-to-bottom). Majme ideálny plyn so známou stavovou rovnicou a vťahom pre C_V

$$C_V = \alpha N k \ . \tag{15}$$

a. Čomu sa rovná C_p a entropia?

b. Ukážte, že pre adiabatický dej platí VT^α a pV^γ sú (rôzne) konštanty.

Príklad 6 (■ Neideálny plyn). Ukáže, že ak má plyn konštantné tepelné kapacity C_V, C_p, potom je jeho stavová rovnica

$$(C_p - C_V)\, T = (p + a)\,(V + b) \ \ , \ a, b = \mathrm{const} \ . \tag{16}$$

Čomu sa rovná energia a entropia ako funkcia V a T.

Návod. Rovnice (12,13).

Príklad 7 (Van der Wallsov plyn). Ako vyzerajú tepelné kapacity a Mayerov vzťah pre plyn, ktorého stavová rovnica je

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \ . \tag{17}$$

Pomôže zistiť, že energia plynu sa dá zapísať v tvare

$$E = cT - \frac{a}{V} \ , \tag{18}$$

kde c je konštanta. Čomu sa rovná entropia ako funkcia V a T.

Príklad 8 (Dietericiho plyn). Ako vyzerajú tepelné kapacity a Mayerov vzťah pre plyn, ktorého stavová rovnica je

$$p = \left(\frac{kT}{V/N - b}\right) e^{-\frac{aN}{VkT}} \ . \tag{19}$$

Čomu sa rovná energia a entropia ako funkcia V a T.

Príklad 9 (Neznáma hmota). Stavová rovnica neznámej hmoty je daná vzťahom

$$p = A\frac{T^3}{V} \ , \ A = \mathrm{const} \ . \tag{20}$$

Aká je jej energia?

Príklad 10 (Neznámy systém). Gibbsova voľná energia pre neznámy systém je daná vzťahom

$$G = RT \log\left(\frac{ap}{(RT)^{5/2}}\right) \ . \tag{21}$$

Vypočítajte jeho tepelné kapacity a zistite, o aký systém ide.

Príklad 11 (■ Termodynamika spinovej retiazky). Majme retiazku N spinov, ktoré sa nachádzajú v magnetickom poli B a navzájom neinteragujú. Energia každého spinu je

$$E = \pm\mu B \tag{22}$$

pre spin orientovaný proti smeru resp v smere magnetického poľa. Retiazka je v rovnováhe s rezervoárom s teplotou T. Magneticáziou M nazveme rozdiel medzi počtom paralelných a anti-paralelných spinov vynásobený magnetickým momentom μ.

a. Ukážte, že štatistická suma retiazky je daná vzťahom

$$Z = 2^N \left(\cosh(\beta\mu B)\right)^N \ . \tag{23}$$

Aká je stredná energia, entropia a magnetizácia retiazky?

b. Overte, že magnetizácia je konjugovanou silou k magnetickému poľu. Nájdite stavovú rovnicu pre retiazku, t.j. vzťah

$$M = f(B, T, N) \ . \tag{24}$$

c. Ako pre retiazku vyzerá Mayerov vzťah?