

# Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

## Príklady z cvičenia

cviko bolo 7.5.2024

kvantové plyny - bozóny

Akkoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

### Hustota stavov

**Príklad 1** (■ Hustota stavov 1). Majme zadaný disperzný vzťah  $E(k)$ . Nájdite hustotu stavov  $g(E)$ , tj. funkciu, ktorá v integráloch cez energie bude robiť to, že budeme správne zarátať všetky energetické stavy, a teda napríklad

$$\langle E \rangle = \int dE E g(E). \quad (1)$$

**Návod.** Pozor na možnú degeneráciu energetických hladín.

**Príklad 2** (Hustota stavov 2). Nájdite hustotu stavov pre

- klasickú časticu,
- relativistickú časticu,
- ultrarelativistickú časticu,
- kvantovomechanickú časticu v kocke s hranou  $L$  bez spinu a so spinom,
- kvantovomechanickú časticu bez spinu a so spinom vo valci.

**Príklad 3** (Hustota stavov 3). Ako vyzerá výsledok predchádzajúceho príkladu v dvoch a v jednom priestorovom rozmere? Ako vyzerá v  $n$ -rozmeroch?

### Plyn bozónov

**Príklad 4** (■ Bozónová stavová rovnica). Ako vyzerá prvá kvantová oprava k stavovej rovnici bozónového plynu? Rozmyslite si, či sa tým tlak plynu zväčšil alebo zmenšil a či je to tak, ako by ste čakali.

**Príklad 5** (Druhá korekcia k stavovej rovnici). Dopočítajte druhú kvantovú korekciu k stavovej rovnici plynu bozónov.

**Príklad 6** (Kvantová korekcia k tepelným kapacitám). Ako zmení kvantová korekcia v stavovej rovnici bozónového plynu jeho tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme a pri konštantnom tlaku? Ako vyzerá Mayerov vzťah?

**Príklad 7** (■ Plyn fotónov a žiarenie dokonale čierneho telesa). Energia fotónu je  $E = \hbar\omega$  a každá energetická hladina je dvojnásobne degenerovaná. Počet fotónov sa nezachováva

- Nájdite hustotu stavov v priestore frekvencií.
- V stave so zadanou frekvenciou sa môže nachádzať ľubovoľne veľa fotónov. Nájdite štatistickú sumu  $Z_\omega$  pro fotóny s danou frekvenciou ak je plyn fotónov v rovnováhe s rezervoárom s teplotou  $T$  (a nulovým fotónovým chemickým potenciálom).
- Na základe toho, že pre neinteragujúce častice je výsledná štatistická suma súčinom štatistických sú nájdite vzťah pre logaritmus celkovej štatistickej sumy  $\log Z$ .
- Nájdite vzťah pre strednú energiu a pre hustotu energie  $E(\omega)d\omega$  v priestore frekvencií.<sup>1</sup>
- Nájdite teplotnú závislosť hustoty energie  $E/V$ , tlaku, entropie a tepelnej kapacity  $C_V$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Tomu sa hovorí Planckov zákon.

<sup>2</sup>Z toho, že pre tok vyžiarenej energie platí  $Ec/4V$  dostaneme Stefan-Boltzmannov zákon.

## Bose-Einsteinova kondenzácia

**Príklad 8.** Vyjadrite kritickú teplotu Bose-Einsteinovej kondenzácie ako funkciu základnej energie častice lokalizovanej v objeme  $a$ , kde  $a = \rho_c^{-1/3}$ .

**Príklad 9.** Porovnajte typickú vzdialenosť medzi časticami a de Broglieho vlnovú dĺžku častice pri teplote  $T_c$ . Aký je dôsledok tohto výsledku?

**Príklad 10.** Ukážte, že v dvoch priestorových rozmeroch nedochádza k Bose-Einsteinovej kondenzácii, tj. že kritická teplota je nulová.

**Príklad 11.** Majme plyn bozónov v troch rozmeroch, ktorý má navyše ešte jeden vnútorný stupeň voľnosti  $\sigma$  s možnými hodnotami energie 0 a  $\Delta$ . Ako zmení tento stupeň voľnosti hodnotu kritической teploty plynu?