Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 18.2.2025 *opakovanie štatistickej fyziky*

Akékoľvek otázky smelo smerujte na `juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1 (Čriepky z termodynamiky).

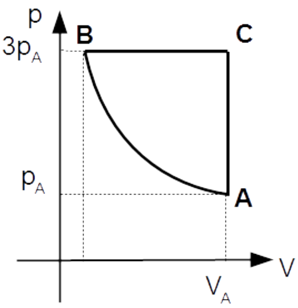
- ■ Ukážte, že na pV diagrame je adiabata ideálneho plynu strmšia ako izoterma v rovnakom bode.
- Kilomól ideálneho plynu koná vratnú zmenu podľa rovnice $pV^\kappa = const$, kde $\kappa = C_p/C_V$. Dokážte explicitným výpočtom, že pri takomto deji je teplo prijaté plynom nulové.
- Určite kritický tlak, teplotu a objem plynu, ktorý sa správa podľa van der Waalsovej stavovej rovnice.

Príklad 2 (Čriepky z pravdepodobnosti).

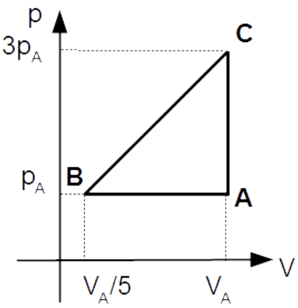
- Majme náhodnú premennú x rovnomerne rozdelenú na intervale $(-a, 0)$ a náhodnú premennú y rovnomerne rozdelenú na intervale $(0, b)$, pričom $a, b > 0$. Nájdite strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýlku premennej $z = x + y$.
- V guli s polomerom R náhodne, s rovnomernou hustotou pravdepodobnosti v celom objeme, vyberiem jeden bod. V akej priemernej vzdialenosti od stredu gule sa bude nachádzať?
- ■ Bežný balíček 32 sedmových kariet rozdáme náhodne medzi štyroch ľudí. S akou pravdepodobnosťou nebude mať jeden konkrétny z nich žiadne eso? S ako pravdepodobnosťou nebudú mať žiadne eso aspoň (ľubovoľní) dvaja z nich? (Esá sú v balíčku štyri.) Ako by to vyzeralo pre žolíkové karty?
- V krabici s objemom V majme N častíc ideálneho plynu. Pozrime sa teraz v náhodnom momente na náhodný kus krabice s objemom V/N. S akou pravdepodobnosťou v ňom nebude žiadna častica?

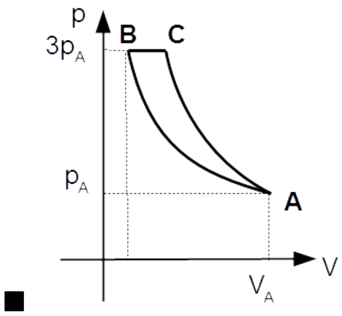
Príklad 3 (Kruhové deje). Majme n molov jednoatómového ideálneho plynu ako médium v procese zobrazenom na obrázku.

a. Vyjadrite tlak, teplotu a objem plynu vo všetkých koncových bodoch úsekov kruhového deja pomocou zadaných hodnôt p_A, V_A.
b. Ktorým smerom musí kruhový dej bežať aby premieňal teplo na prácu a nefungoval ako chladnička? Prečo?
c. Na ktorých úsekoch kruhového deja plyn prijíma teplo? Prečo?
d. Na ktorých úsekoch plyn koná prácu? Prečo?
e. Pre každý úsek vypočítajte pre plyn dodané teplo, vykonanú prácu a zmenu entropie medzi začiatočným a koncovým bodom.
f. Aká je účinnosť tohto stroja?



Úsek AB je adiabata.





Úsek AB je izoterma, AC adiabata.

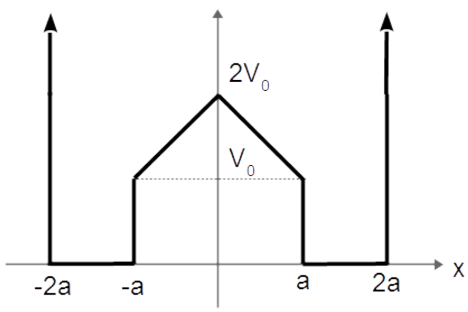
Príklad 4 (Maxwellovia Boltzmanovia)**.** Majme plyn N neinteragujúcich častíc, ktoré sa nachádzajú v jednom rozmere a v potenciáli ako na obrázku. Plyn je pri teplote T.

a. Napíšte hustotu pravdepodobnosti nájsť časticu s rýchlosťou v v mieste x. Ako vyzerá rozdelenie iba pre premennú x?

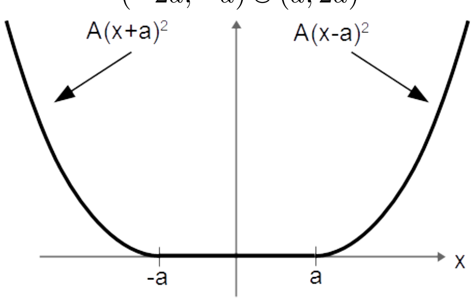
b. Kde sa častice v priemere nachádzajú a aká je ich celková disperzia okolo tejto hodnoty?

c. Aká časť častíc sa nachádza v uvedených intervaloch? ?

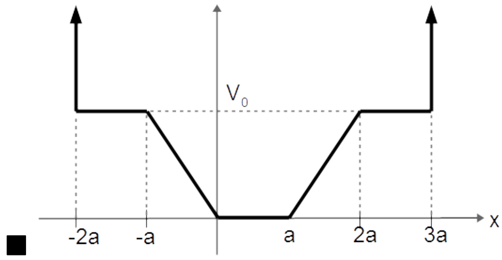
d. Ako vyzerá limita $T \to 0$ a $T \to \infty$ predchádzajúcich výsledkov?



$(-2a, -a) \cup (a, 2a)$



$(-a, a)$



$(0, a)$

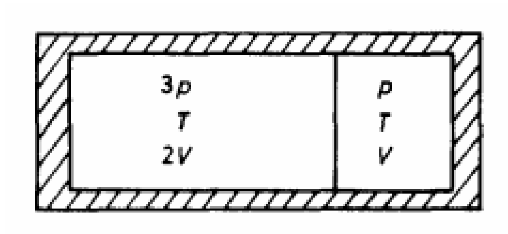
Príklad 5. Majme nádobu s objemom $3V$ rozdelenú pohyblivou a tepelne vodivou prepážkou na dve časti s objemami $V_1 = 2V$ a $V_2 = V$, ktoré sú vyplnené jednoatómovým ideálnym plynom. Na začiatku je v prvej tlak $p_1 = 3p$ a v druhej tlak $p_2 = p$ a v oboch častiach je na začiatku rovnaká teplota T. Nádoba je od okolia tepelne izolovaná.

a. Aké látkové množstvá plynu sú na začiatku v oboch častiach?

b. Aký bude v nádobe tlak po dosiahnutí rovnováhy?

c. Koľko tepla pretečie cez prepážku?

d. Aká je celková zmena entropie systému?



Príklad 6. Majme štyri rozlíšiteľné častice, ktoré majú energetické hladiny 0, Δ a 2Δ. Dve z nich sú však divné a základnú hladinu majú dvakrát degenerovanú.

a. Ak vieme, že systém má energiu 4Δ, aká je jeho entropia?

b. Aký je stredný počet častíc v základom stave?

c. Majme ten istý systém, ale v kontakte s rezervoárom s teplotou T. Aký je stredný počet častíc v základom stave teraz?

Príklad 7. ■ Majme N častíc, ktoré sú nezávislé, rozlíšiteľné a ich stavy sú dané kvantovým číslom k s možnými hodnotami $0, 1, 2, 3$, pričom pre energie stavov platí

$$E_0 < E_1 \ll E_2 = E_3 \ .$$

a. Aká bude stredná hodnota energie tohto systému pri teplotách $T_1 = 0$, $E_1 \ll T_2 \ll E_2$ a $T_3 \gg E_2$? Nájdite odpoveď bez toho, aby ste počítali štatistickú sumu, ale dobre ju zdôvodnite.

b. Ako vyzerá stredná hodnota kvantového čísla k ako funkcia teploty? Opäť bez veľkých výpočtov, stačí načrtnúť základné vlastnosti tejto funkcie, s patričnou argumentáciou.

c. Napíšte štatistickú sumu pre tento systém a nájdite presný výraz pre strednú hodnotu energie a strednú hodnotu k.

Príklad 8. Majme systém, ktorý má nedegenerovanú základnú energetickú hladinu s energiou 0, dvakrát degenerovanú hladinu s energiou Δ a trikrát degenerovanú energetickú hladinu s energiou 2Δ.

a. Majme v tomto systéme N klasických, rozlíšiteľných častíc pri teplote T. Aká je

- stredná energia tohto systému a
- stredná obsadenosť základnej hladiny?

b. Majme potom tento systém pri teplote T a v kontakte s rezervoárom častíc s chemickým potenciálom μ. Aká je teraz

- stredná energia systému a
- stredná obsadenosť základnej hladiny?[1]

Príklad 9. Majme systém, ktorý ma nedegenerovaný základný stav s energiou 0, dva krát degenerovaný stav s energiou Δ a nedegenerovaný stav s energiou 2Δ. Nech je v ňom plyn N rozlíšiteľných neiteragujúcich klasických častíc pri teplote T.

a. Aká je štatistická suma plynu?

b. Aká je stredná energia pripadajúca na jednu časticu a aká je stredná obsadenosť energetických hladín.

[1] Táto časť je veľmi ťažká.

V situácií $N = 2$ medzi časticami teraz zavedieme interakciu nasledovne. Ak sa častice nachádzajú v tom istom jednočasticovom stave, energia mikrostavu sa zníži o ε.

c. Aká je štatistická suma dvoch častíc v tomto prípade?

d. Aká je ich celková stredná energia?

Príklad 10. Majme šachovnicu 4×4 s čiernymi a bielymi políčkami ako na obrázku. Na šachovnici sa nachádzajú dvaja biely a dvaja čierny pešiaci. Na každom políčku sa môže nachádzať iba jedna figúrka a každý pešiak sa môže nachádzať iba na políčkach svojej farby. Energia pešiaka, ktorý sa nachádza na jednom z vnútorných štyroch políčok je o Δ menšia ako na okrajových políčkach. Šachovnica má teplotu T.

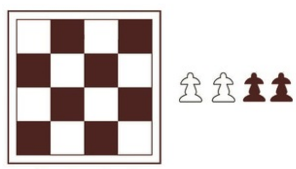
a. Aká je štatistická suma tohto systému, ak sú pešiaci tej istej farby

- rozlíšiteľní,
- nerozlíšiteľní?

Ako vyzerajú jednotlivé mikrostavy? Nemusíte ich detailne vypisovať, stačí načrtnúť principiálne rôzne možnosti, ich počet a energiu.

b. Aký je stredný počet pešiakov akejkoľvek farby v rohoch šachovnice?

c. Vymyslite nejaké pravidlo pre obsadzovanie políčok, ktoré okrem odpudzovania okrajmi šachovnice popisuje príťažlivú interakciu medzi pešiakmi tej istej farby. Vypočítajte štatistickú sumu v takomto prípade?



Príklad 11 (Štatistika 1)**.** Majme tri častice, z ktorých sa každá môže nachádzať v stavoch s energiami $-E, 0, E$, stav s energiou 0 je dvakrát degenerovaný a ostatné pričom stavy sú bez degenerácie. Schematicky vypíšte všetky povolené mikrostavy tohto systému a napíšte preň štatistickú sumu v prípade, že častice spĺňajú

a. klasickú štatistiku a sú rozlíšiteľné,

b. Fermi-Dirackovu štatistiku,

c. Bose-Einsteinovu štatistiku,

d. modifikovanú štatistiku, v ktorej je maximálne obsadzovacie číslo jednočasticového stavu 1, ale častice sú rozlíšiteľné.

Príklad 12 (■ Štatistika 2)**.** Majme dve častice, z ktorých sa každá môže nachádzať v stavoch s energiami $0, E, 2E, 3E, 4E$ a stavy sú bez degenerácie. Schematicky vypíšte všetky povolené mikrostavy tohto systému a napíšte preň štatistickú sumu v prípade, že častice spĺňajú

a. klasickú štatistiku a sú rozlíšiteľné,

b. Fermi-Dirackovu štatistiku,

c. Bose-Einsteinovu štatistiku,

d. modifikovanú štatistiku, v ktorej nemôžu byť súčasne obsadené jednočasticové stavy s rozdielom energií E a menším.

Tieto dva príklady boli v písomkách ako bonusové.

Príklad 13. Majme nasledujúci model dvojrozmerného polyméru. Molekula je retiazka N paličiek dĺžky l. Každá palička má povolené štyri rôzne orientácie, ako na obrázku. Orientácie všetkých paličiek sú nezávislé, takže sa môžu ľubovoľne prekrývať a pretínať. Molekula je v rovnováhe s prostredím s teplotou T.

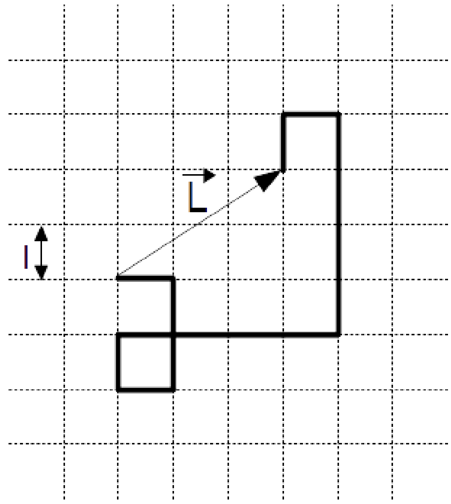
a. Ukážte, že stredná vzdialenosť koncov molekuly je $\left\langle \vec{L} \cdot \vec{L} \right\rangle = Nl^2$.

Uvažujme ďalej silu f, ktorá naťahuje molekulu v x-ovom smere. To znamená, že energia každej paličky je $-fl$ ak je orientovaná v smere sily, $+fl$ ak je orientovaná proti tomuto smeru a 0 ak je orientovaná kolmo na silu.

b. Aká je stredná vzdialenosť koncov molekuly v x-ovom smere v tomto prípade?

c. Ukážte, že sa molekula v režime slabej sily $fl \ll kT$ správa ako pružina. Nájdite jej tuhosť.

d. Molekulu izotermicky natiahneme na 1.05 násobok jej pokojovej dĺžky. O koľko sa zväčší jej voľná energia?



Príklad 14. Majme Carnotov stroj s ohrievačom počiatočnej teploty T_+ a chladičom počiatočnej teploty T_-. Avšak oba tieto objekty sú konečné a majú tepelnú kapacitu C, čo znamená že pri behu stroja sa ich teploty budú približovať, až kým sa nevyrovnajú. Aká bude

- výsledná teplota oboch telies,
- práca, ktorú počas svojej životnosti stroj vykoná,
- jeho účinnosť?