

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko (ne)bolo 25. 2. 2025

pravdepodobnosť

Akékoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1 (Pravdepodobnosti 1). Pri ceste pozorujete dopravu, ktorá prechádza okolo. Autobusy okolo vás prechádzajú v pravidelných intervaloch každých 5 minút. Autá okolo vás prechádzajú náhodne, pričom za malý čas dt je pravdepodobnosť že okolo vás prejde auto dt/τ , kde $\tau = 5\text{min}$.

- Ukážte, že priemerný počet áut, ktoré okolo vás prejdú za jednu hodinu je 12.
- Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne n autobusov? Aká je pravdepodobnosť, že za náhodne zvolených 10 minút okolo vás prejde presne n áut?
- Aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny Δ_B , ktorá je časom medzi dvomi po sebe idúcimi autobusmi? Aké je rozdelenie tejto veličiny Δ_A pre autá?
- Ak pridáme na cestu v náhodnom čase, aké je rozdelenie pravdepodobnosti veličiny δ_B , ktorá meria čas do príchodu najbližšieho autobusu? Aké je rozdelenie tejto veličiny δ_A pre autá?

Príklad 2 (Pravdepodobnosti 2). Klasický harmonický oscilátor s vlastnou frekvenciou ω má energiu E . Na oscilátor sa pozrieme v náhodnom časovom okamihu jeho vývoja. Aké je rozdelenie pravdepodobnosti $\rho(x)$ jeho polohy? T.j. s akou pravdepodobnosťou sa v tomto okamihu nachádza v intervale $(x, x + dx)$?

Príklad 3 (Rozdelenia pravdepodobnosti). Pre nasledujúce rozdelenia pravdepodobnosti jednej náhodnej premennej nájdite normalizačnú konštantu, charakteristickú funkciu, n -tý moment a

varianciu.

$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (0, 1) \quad (1)$$

$$\blacksquare \text{rovnomerné na intervale } (-1, 1) \quad (2)$$

$$\text{rovnomerné na intervale } (a, b) \quad (3)$$

$$\blacksquare \sim \sqrt{1-x^2} \text{ (polkruhové)} \quad (4)$$

$$\sim e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \text{ (Gauss)} \quad (5)$$

$$\sim x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \text{ (Weibull)} \quad (6)$$

$$\sim \frac{1}{2 + e^x + e^{-x}} \quad (7)$$

$$\sim \frac{1}{1 + x^2} \quad (8)$$

Príklad 4 (\blacksquare Rozdelenie v premennej x^2). Pre rozdelenia (1-4) z príkladu 3 nájdite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $y = x^2$.

Príklad 5 (Dvojrozmerný Gauss 1). Majme dve náhodné premenné x, y , ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-x^2 - y^2 - xy} .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

Príklad 6 (\blacksquare Dvojrozmerný Gauss 2). Majme dve náhodné premenné x, y , ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} .$$

Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé. Nájdite rozdelenie pravdepodobnosti premenných

$$v = x + y, \quad w = x - y$$

a rozhodnite, či sú tieto premenné nezávislé.

Príklad 7 (Multi-Gauss). Majme n náhodný premenný $(x_1, \dots, x_n) = x$, ktorých spoločné rozdelenie pravdepodobnosti je dané funkciou

$$\sim e^{-\frac{1}{2}x^T M x},$$

kde M je zadaná symetrická matica. Normujte toto rozdelenie a rozhodnite, ktoré z premenných x sú nezávislé.

Príklad 8 (■ Binomické \rightarrow Poisson). Ukážte, že binomické rozdelenie prejde v limite veľkého počtu pokusov ($n \rightarrow \infty$) ale konečnej strednej hodnoty (tj. $np = \text{const} = \lambda$) na Poissonove rozdelenie s patričnou strednou hodnotou

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Príklad 9 (■ Poisson \rightarrow Gauss). Rozmyslite si, že pre prípad Poissonovho rozdelenia v limite veľkej strednej hodnoty očakávame, že náhodná premenná sa bude dať vyjadriť v tvare

$$k = \lambda + \sqrt{\lambda} x,$$

kde x je nová náhodná premenná pre ktorú očakávame konečné rozdelenie pravdepodobnosti. Ukážte, že takéto x je potom v limite $\lambda \rightarrow \infty$

dané Gaussovským rozdelením s $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Rozmyslite si, ako by vyzeralo rozdelenie náhodnej premennej y , ktorú by sme zdefinovali ako $k = \lambda + y$.

Príklad 10 (Náhodné generátory 1). Nájdite predpis, ako za pomoci generátora rovnomerne rozdelených náhodných čísel z intervalu $(0, 1)$ vyrobiť náhodný generátor náhodných čísel daných rozdelením $(3, 4, 8)$ z príkladu 3.

Príklad 11 (■ Generátor náhodného smeru). Nájdite generátor náhodného smeru z generátora dvoch rovnomerne rozdelených náhodných čísel ξ, η na intervale $(0, 1)$. Výsledkom by teda mali byť uhly θ, ϕ , ktoré budú reprezentovať rovnomerne rozdelený náhodný smer v troch rozmeroch.

Zovšeobecnite tento postup na n -rozmerný prípad a z náhodných čísel rovnomerne rozdelených na intervale $(0, 1)$ vyrobte náhodný smer v n -rozmernom priestore.

Príklad 12 (Náhodné generátory 2). V nejakom programe náhodné generátory z príkladov 10 a 11 naprogramujte. Vygenerujte vašim programom veľa čísel, zobrazte histogram výsledkov a overte, že robia naozaj to, čo by mali.