

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 18.3.2025

termodynamické potenciály a aplikácie

Akokoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Vlastnosti termodynamických potenciálov

Príklad 1 (■ Maxwellove vzťahy - odvodzovátka 1). Máme nasledujúce štyri termodynamické potenciály

- energia $E(S, V)$

$$dE = TdS - pdV , \quad (1)$$

- voľná energia $F(T, V)$

$$F = E - TS , \quad (2)$$

$$dF = -SdT - pdV , \quad (3)$$

- Gibbsova voľná energia $G(T, p)$

$$G = F + pV , \quad (4)$$

$$dG = -SdT + Vdp , \quad (5)$$

- entalpia $H(S, p)$

$$H = E + pV , \quad (6)$$

$$dH = TdS + Vdp . \quad (7)$$

- Ujasnite si, ako vznikajú vzťahy pre zmenu každého potenciálu a za akých podmienok je každý z potenciálov zaujímavý.
- Ujasnite si, s akými deriváciami akých potenciálov súvisia fyzikálne veličiny.
- Z komutovania druhých parciálnych derivácií odvoďte štyri Maxwellove vzťahy.

Príklad 2 (Identity pre derivácie - odvodzovátka 2). Majme tri premenné x, y, z , ktoré závisia

$x(y, z), y(x, z), z(x, y)$. Ukážte, že pre parciálne derivácie platí

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_z = 1 , \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_x \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_y = -1 . \quad (9)$$

Rozmyslite si, že prvý vzťah je dôsledkom vety o derivovaní inverznej funkcie a druhý vety o derivovaní implicitne zadanej funkcie. Prečo sa v prvom vzťahu d -čka kráti, ale v druhom nie?

Aplikácie termodynamických vzťahov

Príklad 3 (■ Ukážte, že).

$$\left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V - p , \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial E}{\partial p} \right|_T = -T \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p - p \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T , \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial C_V}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right|_V , \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial C_p}{\partial p} \right|_T = -T \left. \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right|_p . \quad (13)$$

Príklad 4 (Zovšeobecnený Mayerov vzťah). .

- Rozmyslite si, že nasledujúce dve definície sú rozumné

$$C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V , \quad C_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p . \quad (14)$$

- Nájdite rozdiel $C_p - C_V$ vyjadrený cez derivácie stavových veličín, ktoré sa dajú získať zo stavovej rovnice $p = f(V, T)$.
- Ukážte, že pre stavovú rovnicu ideálneho plynu dostaneme dobre známy výsledok.

Príklad 5 (Adiabatický dej top-to-bottom). Majme ideálny plyn so známou stavovou rovnicou a vťahom pre C_V

$$C_V = \alpha Nk . \quad (15)$$

- Čomu sa rovná C_p a entropia?
- Ukážte, že pre adiabatický dej platí VT^α a pV^γ sú (rôzne) konštanty.

Príklad 6 (■ Neideálny plyn). Ukáže, že ak má plyn konštantné tepelné kapacity C_V, C_p , potom je jeho stavová rovnica

$$(C_p - C_V)T = (p + a)(V + b) , \quad a, b = \text{const} . \quad (16)$$

Čomu sa rovná energia a entropia ako funkcia V a T .

Návod. Rovnice (12,13).

Príklad 7 (Van der Wallsov plyn). Ako vyzerajú tepelné kapacity a Mayerov vzťah pre plyn, ktorého stavová rovnica je

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT . \quad (17)$$

Pomôže zistiť, že energia plynu sa dá zapísať v tvare

$$E = cT - \frac{a}{V} , \quad (18)$$

kde c je konštanta. Čomu sa rovná entropia ako funkcia V a T .

Príklad 8 (Dietericiho plyn). Ako vyzerajú tepelné kapacity a Mayerov vzťah pre plyn, ktorého stavová rovnica je

$$p = \left(\frac{kT}{V/N - b}\right) e^{-\frac{aN}{VkT}} . \quad (19)$$

Čomu sa rovná energia a entropia ako funkcia V a T .

Príklad 9 (Neznáma hmota). Stavová rovnica neznámej hmoty je daná vzťahom

$$p = A \frac{T^3}{V} , \quad A = \text{const} . \quad (20)$$

Aká je jej energia?

Príklad 10 (Neznámy systém). Gibbsova voľná energia pre neznámy systém je daná vzťahom

$$G = RT \log \left(\frac{ap}{(RT)^{5/2}} \right) . \quad (21)$$

Vypočítajte jeho tepelné kapacity a zistite, o aký systém ide.

Príklad 11 (■ Termodynamika spinovej retiazky). Majme retiazku N spinov, ktoré sa nachádzajú v magnetickom poli B a navzájom neinteragujú. Energia každého spinu je

$$E = \pm \mu B \quad (22)$$

pre spin orientovaný proti smeru resp v smere magnetického poľa. Retiazka je v rovnováhe s rezervoárom s teplotou T . Magnetizáciou M nazveme rozdiel medzi počtom paralelných a anti-paralelných spinov vynásobený magnetickým momentom μ .

- Ukážte, že štatistická suma retiazky je daná vzťahom

$$Z = 2^N (\cosh(\beta \mu B))^N . \quad (23)$$

Aká je stredná energia, entropia a magnetizácia retiazky?

- Overte, že magnetizácia je konjugovanou silou k magnetickému poľu. Nájdite stavovú rovnicu pre retiazku, t.j. vzťah

$$M = f(B, T, N) . \quad (24)$$

- Ako pre retiazku vyzerá Mayerov vzťah?