

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 13.5.2025

kvantové plyny - bozóny

Akokoľvek otázky smelo smerujte na juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Hustota stavov

Príklad 1 (■ Hustota stavov 1). Majme zadaný disperzný vzťah $E(k)$. Nájdite hustotu stavov $g(E)$, tj. funkciu, ktorá v integráloch cez energie bude robiť to, že budeme správne zarátavať všetky energetické stavy, a teda napríklad

$$\langle E \rangle = \int dE E g(E) . \quad (1)$$

Návod. Pozor na možnú degeneráciu energetických hladín.

Príklad 2 (Hustota stavov 2). Nájdite hustotu stavov pre

- klasickú časticu,
- relativistickú časticu,
- ultrarelativistickú časticu,
- kvantovomechanickú časticu v kocke s hranou L bez spinu a so spinom,
- kvantovomechanickú časticu bez spinu a so spinom vo valci.

Príklad 3 (Hustota stavov 3). Ako vyzerá výsledok predchádzajúceho príkladu v dvoch a v jednom priestorovom rozmere? Ako vyzerá v n -rozmeroch?

Plyn bozónov

Príklad 4 (■ Bozónová stavová rovnica). Ako vyzerá prvá kvantová oprava k stavovej rovnici bozónového plynu? Rozmyslite si, či sa tým tlak plynu zväčšil alebo zmenšil a či je to tak, ako by ste čakali.

Príklad 5 (Druhá korekcia k stavovej rovnici). Dopočítajte druhú kvantovú korekciu k stavovej rovnici plynu bozónov.

Príklad 6 (Kvantová korekcia k tepelným kapacitám). Ako zmení kvantová korekcia v stavovej rovnici bozónového plynu jeho tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme a pri konštantnom tlaku? Ako vyzerá Mayerov vzťah?

Príklad 7 (■ Plyn fotónov a žiarenie dokonale čierneho telesa). Energia fotónu je $E = \hbar\omega$ a každá energetická hladina je dvojnásobne degenerovaná. Počet fotónov sa nezachováva

- Nájdite hustotu stavov v priestore frekvencií.
- V stave so zadanou frekvenciou sa môže nachádzať ľubovoľne veľa fotónov. Nájdite štatistickú sumu Z_ω pro fotóny s danou frekvenciou ak je plyn fotónov v rovnováhe s rezervoárom s teplotou T (a nulovým fotónovým chemickým potenciálom).
- Na základe toho, že pre neinteragujúce častice je výsledná štatistická suma súčinom štatistických sú nájdite vzťah pre logaritmus celkovej štatistickej sumy $\log Z$.
- Nájdite vzťah pre strednú energiu a pre hustotu energie $E(\omega)d\omega$ v priestore frekvencií.¹
- Nájdite teplotnú závislosť hustoty energie E/V , tlaku, entropie a tepelnej kapacity C_V .²

¹Tomu sa hovorí Planckov zákon.

²Z toho, že pre tok vyžiarenej energie platí $Ec/4V$ dostaneme Stefan-Boltzmannov zákon.

Bose-Einsteinova kondenzácia

Príklad 8. Vyjadrite kritickú teplotu Bose-Einsteinovej kondenzácie ako funkciu základnej energie častice lokalizovanej v objeme a , kde $a = \rho_c^{-1/3}$.

Príklad 9. Porovnajte typickú vzdialenosť medzi časticami a de Broglieho vlnovú dĺžku častice pri teplote T_c . Aký je dôsledok tohto výsledku?

Príklad 10. Ukážte, že v dvoch priestorových rozmeroch nedochádza k Bose-Einsteinovej kondenzácii, tj. že kritická teplota je nulová.

Príklad 11. Majme plyn bozónov v troch rozmeroch, ktorý má navyše ešte jeden vnútorný stupeň voľnosti σ s možnými hodnotami energie 0 a Δ . Ako zmení tento stupeň voľnosti hodnotu kritической teploty plynu?