

Vybrané kapitoly zo štatistickej fyziky

Príklady z cvičenia

cviko bolo 13. 5. 2025

7.5, účinné prierezy, BKR

Akokoľvek otázky smelo smerujte na [juraj\(a\)tekel\(b\)gmail\(c\)com](mailto:juraj(a)tekel(b)gmail(c)com)

7.5 Linear Response Theory and the Fluctuation–Dissipation Theorem

Príklad 1 (Exercise 7.4). Compute the dynamic susceptibility for a Brownian particle of mass m in the presence of white noise $\xi(t)$ and fluid friction γ .

Príklad 2 (Exercise 7.5). Verify the Kramers–Kronig relations for the dynamic susceptibility in Exercise 7.4.

Príklad 3 (Exercise 7.6). Given the dynamic susceptibility $\chi(\omega) = (-im\omega + \gamma)^{-1}$ for simple Brownian motion (see Exercise 7.4) and the thermal average $\langle v^2 \rangle_T = kBT/m$, use the fluctuation–dissipation theorem to obtain the velocity autocorrelation function.

Príklad 4 (Exercise 7.7). Prove that $\bar{\xi}(0) = \bar{g}^{-1}/T$, where $\bar{g}$ is the matrix whose matrix element is $g_{ij} = (\partial^2 S / \partial \alpha_i \partial \alpha_j)_U$.

Účinné prierezy

Príklad 5 (■ Zrážka s nehybnou guľou 1). Majme dve rovnako ťažké gule rovnakého polomeru R . Jedna je nehybne položená na stole a druhá na ňu letí. Ak je stojaca guľa pevne uchytená, ako vyzerá výraz pre diferenciálny a totálny účinný prierez?

Príklad 6 (Zrážka s nehybnou guľou 2). Rozmyslite si, ako by sa zmenila odpoveď na predchádzajúcu otázku v prípade rôznych polomerov ale stále rovnakých hmotností.

Príklad 7 (■ Zrážka s voľnou guľou). Rovnako ako v prvom príklade, ale stojaca guľa sa môže voľne hýbať.

Príklad 8. Ukážte, že pri zrážke dvoch molekúl pri prechode z laboratórnej do ťažiskovej sústavy platí

$$d\vec{v}_1 d\vec{v}_2 = d\vec{u} d\vec{V}$$

kde $\vec{u}$ je vzájomná rýchlosť molekúl a $\vec{V}$ je rýchlosť pohybu ich ťažiska.

Príklad 9 (Rutherfordov rozptyl 1). Nájdite diferenciálny účinný prierez pre zrážku elektrónu s hmotnosťou m a nábojom $-e$ s jadrom zlata, ktoré je veľmi ťažké a má náboj Zq pre $Z = 79$. Rýchlosť elektrónu vo veľkej vzdialenosti od atómu je v a zámerný parameter je b .

Môže sa zísť riešenie Keplerovej úlohy z mechaniky pre potenciál $V(r) = +k/r$

$$\frac{1}{r} = -\frac{mk}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right).$$

Nájdite potom aj totálny účinný prierez.

Príklad 10 (■ Rutherfordov rozptyl 2). Nájdite diferenciálny účinný prierez pre zrážku elektrónu s hmotnosťou m a nábojom $-e$ s jadrom zlata, ktoré je veľmi ťažké a má náboj Zq pre $Z = 79$. Rýchlosť elektrónu vo veľkej vzdialenosti od atómu je v a zámerný parameter je b .

Úlohu ale neriešajte pracným integrovaním pohybových rovníc, ale použitím zákonov zachovania a Runge-Lentzovho vektora.

Nájdite potom aj totálny účinný prierez.

Príklad 11 (Dúha). Na dúhu sa dá pozeráť ako na rozptylový problém.

- Nájdite vzťah medzi imapakt parametrom b slnečného lúča a uhol rozptylu θ pri rozptyle na guľovej kvapke vody. K rozptylu dochádza tak jedným vnútorným odrazom v kvapke. Index lomu svetla vo vode je n .
- Rozmyslite si, čo sa zmení na vzťahu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|$$

pre prípad nejednoznačného vzťahu $b(\theta)$.

Návod. Pomôže pozrieť sa na vzťah $\theta(b)$.

- Rozmyslite si, že takto dostaneme pre rozptyl svetla na kvapke ostrý peak v množstve prichádzajúceho svetla rozptýleného po istým uhlom, ktorý závisí od n a teda od farby svetla.

- Ak vás to zaujíma, môžete skúsiť dopo-
čítať detaily a nájsť druhorádovú dúhu,
ktorá vzniká viacnásobným odrazom svetla
vo vnútri kvapky.

BKR

Príklad 12 (■ Derivácia Maxwella). Pre Maxwell-
love rozdelenie

$$f_0 = n(\vec{x}) \left(\frac{m\beta(\vec{x})}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\beta(\vec{x})}{2} \vec{v}^2}$$

vypočítajte Df_0 v silovom poli homogénneho tia-
žového poľa $\vec{F} = (0, 0, -mg)$.

Príklad 13 (izotermická a adiabatická atmo-
sféra). Vo výsledku predchádzajúceho príkladu
urobte predpoklad o

- izotermickej,
- adiabetickej atmosfére

a nájdite závislosť hustoty vzduchu od výšky.

Príklad 14 (■ Viskozita kvapaliny). Aký vzťah
dostávame z BKR pre viskozitu kvapaliny?

Príklad 15 (■ Tepelná vodivosť). Aký vzťah do-
stávame z BKR pre tepelnú vodivosť plynu?

Príklad 16 (Predpoveď). Z výsledkov predchá-
dzajúcich dvoch úloh sa dá vylúčiť parameter τ
a dostať vzťah pre makroskopicky merateľné veli-
činy. Urobte to a porovnajte s hodnotami pre rôzne
plyny.

Príklad 17 (■ Elektrická vodivosť plynu). Aký
vzťah dostávame z BKR pre elektrickú vodivosť
plynu?

Príklad 18 (Elektrická vodivosť kovu). Aký
vzťah dostávame z BKR pre elektrickú vodivosť
plynu elektrónov v kove?

Príklad 19 (Makroskopické zachovanie energie).
Aká makroskopickú hydrodynamickú rovnicu do-
stávame z BKR ak uvažíme zákon zachovania ener-
gie v zrážkach?