Harmonický oscilátor
(ako príklad využitia komplexných čísel)

Juraj Tekel
Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
FMFI UK
Mlynska Dolina
842 48 Bratislava
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Matematický úvod

- **komplexné čísla** sa objavujú ako riešenia rovníc typu $x^2 + 1 = 0$. riešenie takejto rovnice nazveme i

  všeobecné komplexné číslo z je dane skrz dve reálne čísla x, y, platí

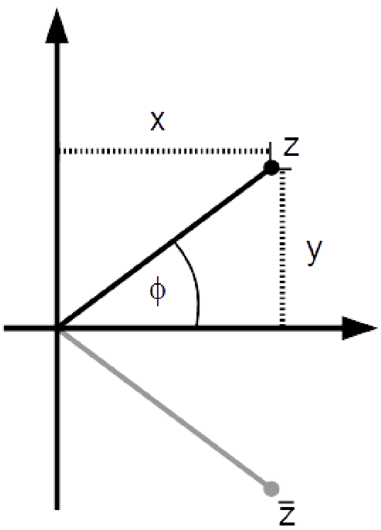
  $$z = x + iy$$

  a dá sa reprezentovať ako bod komplexnej roviny so súradnicami $[x, y]$. veľkosť komplexného čísla je (vzdialenosť od počiatku)

  $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  uhol medzi sprievodičom a x-ovou osou označíme φ, platí

  $$z = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi$$



  keďže[1] $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ dostávame

  $$z = |z|e^{i\varphi}$$

  toto bude pre nás najužitočnejší tvar komplexného čísla

  pre súčin komplexných čísel platí

  $$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

  špeciálne pre komplexne združené číslo $\bar{z} = x - iy$

  $$\bar{z} \cdot z = |z||z|e^{i(\varphi-\varphi)} = |z|^2$$

  komplexne združené k súčtu/súčinu je súčet/súčin komplexne združených

  komplexne združené ku komplexne združenému je pôvodné

  ak je komplexné číslo v skutočnosti reálne tak $z = \bar{z}$

- **derivovanie** - budeme potrebovať vedieť, že

  $$\frac{d}{dx}e^{Ax} = Ae^{Ax} \qquad (1)$$

- **linearita** - operácia

  $$L : x \to L(x)$$

  je lineárna, ak platí[2]

  $$L(x + y) = L(x) + L(y)\ ,\ L(ax) = aL(x)$$

  dôležité keď riešime rovnicu $L(x) = y$ pre neznámu x a zadané y. ak totiž poznáme riešenie x_1 pre y_1 a riešenie x_2 pre y_2 dostávame, že riešenie pre $y_1 + y_2$ je $x_1 + x_2$

  špeciálne ak $y = 0$ tak ľubovoľná lineárna kombinácia dvoch riešení $Ax_1 + Bx_2$ je tiež riešenie

[1] Dôkaz skrz Taylorove rozvoje alebo z konštantnosti funkcie $e^{-it}(\cos t + i \sin t)$.
[2] Všimnite si, že to je vcelku špeciálna vec. Rozmyslite si napríklad, že druhá mocnina $x \to x^2$ NIE je lineárna a prečo.

Fyzikálny úvod

- deriváciu podľa času budeme označovať bodkou
$$\frac{d}{dt}x(t) := \dot{x}(t)$$
budeme iba v jednom rozmere - sme fixovaný na priamku

- fyzikálna interpretácia derivácie je rýchlosť $v = \dot{x}$, derivácia rýchlosti je zrýchlenie $a = \dot{v} = \ddot{x}$

- Newtonov zákon sily teda vyzerá nasledovne
$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$
kde sme zdôraznili, že sila môže závisieť od toho, kde sa nachádzame (potenciál) od toho ako rýchlo sa pohybujeme (odpor) ale nie od nášho zrýchlenia

- **počiatočné podmienky** Newtonovho zákona sú dve - poloha a rýchlosť, tie už potom úplne určujú pohyb telesa

  ak teda nájdeme riešenie, ktorým vieme splniť ľubovoľné počiatočné podmienky, rovnica nemôže mať už žiadne iné riešenie[3]

- **harmonický oscilátor** je systém, na ktorý pôsobí sila úmerná výchylke z rovnovážnej polohy pôsobiaca smerom späť do rovnovážnej polohy, t.j.
$$F = -m\omega_0^2 x$$
kde druhá mocnina zdôrazňuje to, že číslo stojace pred x je kladné (všetky fyzikálne parametre chceme reálne)

- najjednoduchšia **odporová sila** aká sa dá predstaviť je tvaru
$$F = -2\kappa m\dot{x}$$
pričom znamienko mínus hovorí, že to je odporová sila

- prečo to je dôležité si povieme v záverečenej časti, ale ak ste netrpezliví tak si to môžete prečítať už teraz

Voľný harmonický oscilátor

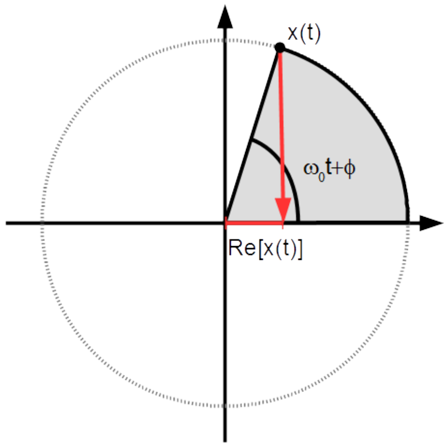
- riešime pohybovú rovnicu
$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -\omega_0^2 x$$
hľadáme teda funkciu, ktorá po dvoch derivovaniach dá naspať sama seba až na nejakú (zápornú) konštantu. spomenieme si na (1), napadne nás exponenta a skúsime funkciu tvaru $x = Xe^{\alpha t}$, dosadíme do rovnice a dostaneme
$$\alpha^2 Xe^{\alpha t} = -\omega_0^2 Xe^{\alpha t} \Rightarrow \;\alpha^2 = -\omega_0^2$$
ak by sme dovolili iba reálne α tak sme skončili, ale ak dovolíme komplexné α dostaneme ako riešenie
$$\alpha_\pm = \pm i\omega_0$$
máme teda dve riešenia lineárnej rovnice[4] a teda aj ľubovoľná ich kombinácia je riešením
$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$
kde A, B sú ľubovoľné komplexné čísla. na ich fixovanie použijeme počiatočné podmienky x_0, v_0
$$A = \frac{x_0 - iv_0/\omega_0}{2}$$
$$B = \frac{x_0 + iv_0/\omega_0}{2}$$

- toto ale zaváňa problémom, lebo však výchylka môže vyjsť komplexná a to by nemala. riešenie

  - ako fyzikálnu zoberieme iba reálnu časť riešenia $\mathrm{Re}\,[x(t)]$. reálna časť vzniká ako lineárna kombinácia riešení a teda aj sama o sebe je riešenie. reálnu časť dostaneme nasledovne
  $$\mathrm{Re}\,[x] = \frac{x + \bar{x}}{2} = \frac{A + \bar{B}}{2}e^{i\omega_0 t} + \frac{\bar{A} + B}{2}e^{-i\omega_0 t}$$
  čo je reálna časť nejakého komplexného čísla
  $$x(t) = X_0 e^{i\omega_0 t} = |X_0| e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

[3] Táto veta má isté obmedzenia, ale tie sú skôr technického charakteru.
[4] Pre $L(x) = m\ddot{x} + m\omega_0^2 x$.

$x(t)$ je číslo, ktoré s nejakou začiatočnou fázou rovnomerne obieha po kružnici a riešenie je potom jeho reálna časť = priemet na x-ovú os



– a teda

$$Re[x(t)] = |X_0| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

čo je zvyčajný tvar riešenia rovnice pre harmonický oscilátor

– z vyjadrenia A, B vidíme, že pre reálne počiatočné podmienky $A = \bar{B}$ a teda

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{A}e^{-i\omega_0 t} + \bar{B}e^{i\omega_0 t} = Be^{-i\omega t} + Ae^{i\omega_0 t} \\ &= x(t) \end{aligned}$$

a teda dostaneme reálne riešenie

- ak zapíšeme $A = |X_0|e^{ia}$ potom

$$\begin{aligned} x(t) &= |X_0|e^{i(\omega_0 t + a)} + |X_0|e^{-i(\omega_0 t + a)} \\ &= |X_0| \cos(\omega_0 t + a) \end{aligned}$$

čo je zvyčajný tvar riešenia rovnice pre harmonický oscilátor

Tlmený harmonický oscilátor

- doteraz by sme si vedeli poradiť aj bez komplexných čísel so sínusmi a kosínusmi. teraz to už ale nepôjde
- budeme riešiť pohybovú rovnicu s najjednoduchšou odporovou silou

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\kappa \dot{x}$$

všimnite si, že stále ide o lineárnu rovnicu s nulovou pravou stranou. opäť je prirodzené hľadať výsledok v tvare $x(t) = Xe^{\alpha t}$. dostaneme tak rovnicu

$$\alpha^2 + 2\kappa\alpha + \omega_0^2 = 0$$

jej riešenie je

$$\alpha_\pm = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$$

máme tri kvalitatívne rôzne situácie

– silné tlmenie $\kappa^2 - \omega_0^2 > 0$

– slabé tlmenie $\kappa^2 - \omega_0^2 < 0$

– kritické tlmenie $\kappa^2 - \omega_0^2 = 0$

postupne sa pozrieme na všetky

- **silné tlmenie** - rovnica má dve reálne riešenia a ak označíme $w = \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$ riešenia majú tvar

$$x(t) = e^{-\kappa t}\left(Ae^{wt} + Be^{-wt}\right)$$

pre veľké časy druhý člen v zátvorke prestane byť relevantný a teda

$$x \sim e^{-(\kappa - w)t}$$

ale keďže $\kappa > w$ ani tento člen veľa vody nenamúti a teleso svoj pohyb veľmi skoro prakticky zastaví

- **kritické tlmenie** - tu máme iba jedno riešenie, takže vieme splniť iba jednu počiatočnú podmienku. to sa dá vyriešiť ale pre nás nebude veľmi dôležité (a je pre nás vlastne aj trochu ťažké). podstatné je, že kvalitatívne to nebude (veľmi) iné ako kritické tlmenie
- **slabé tlmenie** - pre nás najzaujímavejšia situácia. označíme $\omega^2 = \omega_0^2 - \kappa^2$ a dostaneme

$$x(t) = e^{-\kappa t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right)$$

a teda exponenciálne utlmované kmitanie so zmenenou frekvenciou ω, reálne počiatočné podmienky opäť dajú[5] $\bar{A} = B$ a teda

$$x(t) = e^{-\kappa t} X_0 \cos(\omega t + a)$$

[5] Overte!

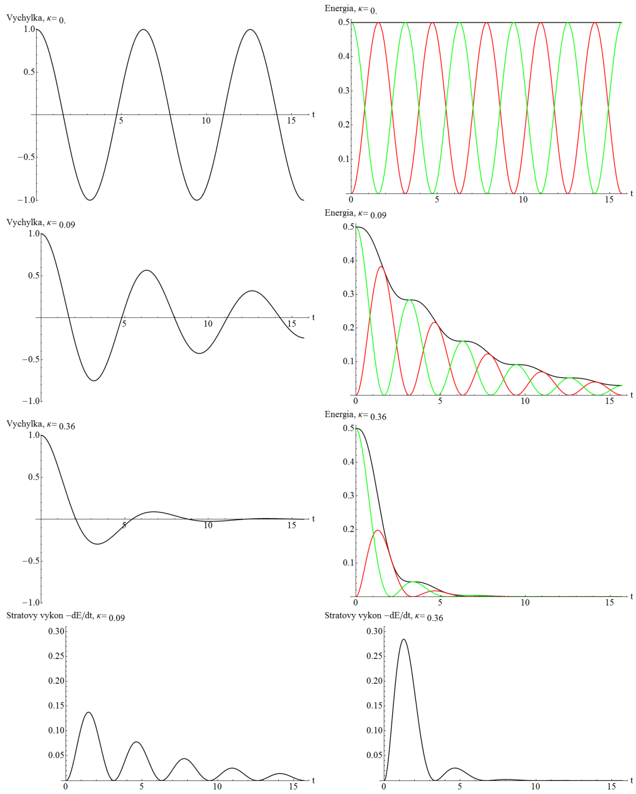
- takéto čosi zodpovedá v prechádzajúcom obrázku krúženiu po špirále smerom do stredu
- ako príklad vínový pohár s vodou. keď do pohára ťukneme, vychádza z neho zvuk, ktorý ale postupne slabne. ak do pohára pridáme trochu vody, zvýšime tlmenie κ a budeme počuť hlbší zvuk s nižším ω. ak zvýšime tlmenie nad určitú hranicu (zväčša na to treba niečo ťažšie ako voda, napríklad piesok alebo ryžu), po ťuknutí nebude z pohára vychádzať žiadny zvuk

Energetická bilancia tlmeného oscilátora

- v prípade oscilátora máme dva druhy energie, kinetickú $m\dot{x}^2/2$ a potenciálnu $m\omega_0^2 x^2/2$, z vyjadrenia $x(t)$ dostávame pre ich súčet

$$E(t) = \frac{1}{2} m X_0^2 e^{-2\kappa t} \big[\omega_0^2 + \kappa^2 \cos(2\omega t + 2a) + \\ + \omega\kappa \sin(2\omega t + 2a)\big]$$

- energia sa teda v systéme nezachováva, ale sa stráca
- dá sa spočítať, že energia, ktorá sa stratí pôsobením odporovej sily je presne rovná rozdielu medzi počiatočnou energiou a výrazom vyššie[6]
- pre $\kappa = 0$ dostaneme zachovávanie sa energie a jej prelievanie medzi kinetickou formou a potenciálnou formou
- nasleduje niekoľko obrázkov[7] výchylky, energie a stratového výkonu pre rôzne hodnoty κ



Tlmený budený harmonický oscilátor

- k harmonickej a odporovej sile teraz pridáme (budiacu) vonkajšiu silu $F(t)$, riešime teda[8]

$$m\ddot{x} = -m\omega_0 x - 2\kappa m\dot{x} + F(t)$$

dôležité je, že sme nepokazili linearitu rovnice a riešenie pre silu $F_1 + F_2$ bude súčet riešení pre sily F_1 a F_2 osobitne

- to nám dovoľuje pozerať sa na sily tvaru $F_0 e^{i\Omega t}$, každá rozumná sila sa dá napísať ako superpozícia takýchto síl [9]

[6]Môžete to skúsiť. Rozmyslite si, že počiatočná energia je

$$E_0 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x(0)^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}(0)^2$$

a že do času t vykoná odporová sila prácu

$$\int_0^t d\tau 2m\kappa\dot{x}(\tau)^2 .$$

[7]Obrázky sú pre počiatočné podmienky $x(0) = 1, v(0) = 0$ a jednotkovú hmotnosť a vlastnú frekvenciu. Rozmyslite si, ktorá farba reprezentuje ktorú formu energie.

[8]Mohli by sme najskôr uvažovať prípad $\kappa = 0$, ten je však zbytočne komplikovaný a v zaujímavých situáciách nefyzikálny.

[9]Kosínus ako súčet, sínus ako rozdiel, komplikovanejšie sily komplikovanejšie.

- opäť to zaváňa komplexnými veličinami, riešenie bude podobné ako v predchádzajúcej časti. buď zoberieme iba reálnu časť alebo si rozmyslíme, že pre reálne počiatočné podmienky a reálne sily dostaneme vždy iba reálne výsledky

- poučený predchádzajúcimi kapitolami skúsime riešenie v tvare $x(t) = X_0 e^{i\Omega t}$ (teraz už nie hocijaká ω, lebo čakáme že výchylka bude rešpektovať pôsobiacu silu)(upozornenie: X_0 aj F_0 môžu byť komplexné)

- výpočet ukáže, že

$$X_0 = \frac{F_0}{m\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + i2\kappa\Omega\right]} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\kappa\Omega)^2}} e^{-i\phi}$$

kde

$$\tan\phi = \frac{2\kappa\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

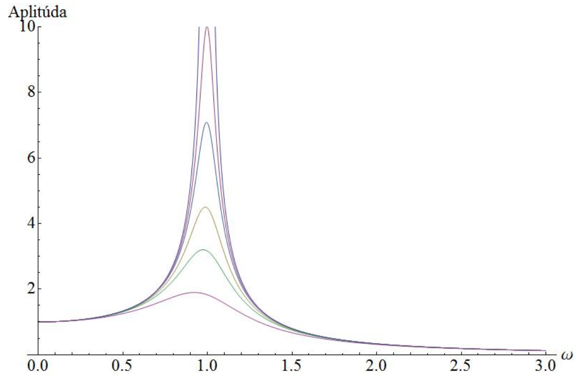
- nesmieme zabúdať na riešenie s nulovou silou a všeobecné riešenie bude teda

$$x(t) = e^{-\kappa t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right) + \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\kappa\Omega)^2}} e^{i(\Omega t - \phi)}$$

toto riešenie vie splniť ľubovoľné počiatočné podmienky, takže iné riešenie byť nemôže. okrem toho po dostatočne dlhom čase bude prvá časť riešenia úplne utlmená a môžeme ju ignorovať

všimnite si, že sme (tak trochu náhodou) vyriešili aj prípad pre konštantnú vonkajšiu silu, v ktorom $\Omega = 0$. skúste napísať pre nejaké konkrétne počiatočné podmienky riešenie v tomto prípade

- študuje druhú časť riešenia. jej veľkosť má ostré maximum okolo hodnoty $\Omega = \omega_0$, jej konečnosť zachraňuje jedine prítomnosť odporovej sily κ. tomu sa hovorí rezonancia



- rezonancia je extrémne dôležitý jav, s ktorým sa v praxi stretávame strašne často. rozmyslite si, ako to je napríklad pri takom hojdaní na hojdačke

- výchylka je fázovo posunutá oproti sile, v prípade rezonancie o pol periódy. aj toto sa dá rozmyslieť na príklade s hojdačkou

- v utlmenom režime v ktorom dominuje nútené kmitanie môžeme spočítať prácu, ktorú vykoná za jednu periódu budiaca sila (tj. dodanú energiu)

$$\int_0^{2\pi/\Omega} dt F(t)\dot{x}(t)$$

a prácu ktorú vykoná odporová sila (tj. stratu energie)

$$\int_0^{2\pi/\Omega} dt 2\kappa m \dot{x}(t)^2$$

výsledok dostaneme samozrejme rovnaký

$$\frac{F_0^2 2\kappa\Omega\pi/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\kappa\Omega)^2}$$

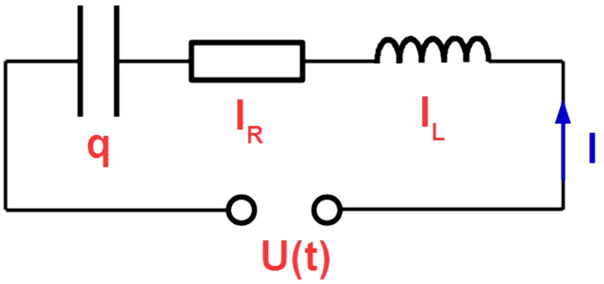
RLC obvody

- iným dôležitým systémom, v ktorom sa objavuje rovnaká rovnica sú RLC obvody. tie sú zložené z troch pasívnych prvkov
  - *kondenzátor*, na ktorom je pri napätí U nahromadený náboj $q = CU$, kde C je charakteristika kondenzátora - kapacita
  - *rezistor*, na ktorom je pri prúde I napätie $U = RI$, kde R je charakteristika rezistoru - odpor

- *cievka*, na ktorej sa pri zmene prúdu $\dot{I}$ indukuje napätie $U = L\dot{I}$, kde L je charakteristika cievky - indukčnosť

do obvodu môžeme zapojiť aj aktívny prvok, zdroj napätia $U(t)$, ktorá sa môže s časom meniť

- najjednoduchší obvod so všetkými tromi vyzerá nejak takto



- z druhého Kirchhoffovho zákona dostávame, že súčet napätí na troch prvkoch obvodu musí byť rovnaký, ako je napätie zdroja

$$\frac{1}{C}q + I_R R + L\dot{I}_L = U(t)$$

v rovnovážnom stave preteká odporom aj cievkou rovnaký prúd $I_L = I_R = I$ a náboje, ktoré tečú cez obvod sa zachytávajú na kondenzátore, tj. $I = \dot{q}$ a dostaneme

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U(t)$$

- dostávame teda rovnicu ako pre harmonický oscilátor ale

$$m \to L\,,\, \omega_0 \to \frac{1}{\sqrt{LC}}\,,\, \kappa \to \frac{R}{2L}\,,\, F \to U$$

- máme teda hneď riešenie, v ktorom nás zaujíma viac I ako q. pre kosínusovú silu napríklad

$$\begin{aligned} I = & \frac{U_0\Omega}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{R\Omega}{L}\right)^2}} \\ & \times \sin\left(\Omega t + \phi - \arctan\frac{R\Omega/2C}{\frac{1}{LC} - \Omega^2}\right) \end{aligned}$$

z toho sa dá dopočítať už čokoľvek, čo by nás mohlo zaujímať

- v zložitejších situáciách sa zíde zaviesť pojem impedancie prvku Z

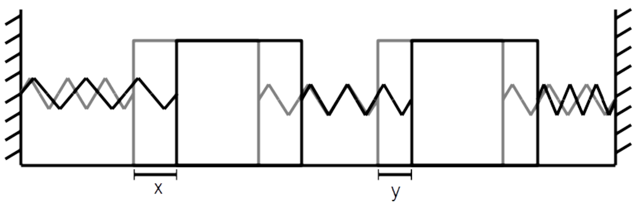
$$Z = R + i\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)$$

plus pravidlá o skladaní impedancií sériovo/paralelne zapojených prvkov a fázových posunoch

Spriahnuté oscilátory

- pomocou zovšeobecnenia výchyliek do komplexných čísel vieme vyriešiť aj komplikovanejšie mechanické problémy

- majme dve telesá na pružinách, ktoré sú spojené treťou pružinou ako na obrázku (pre jednoduchosť budeme uvažovať rovnaké tuhosti všetkých pružín k)



- výchylku prvého z rovnovážnej polohy označme x, výchylku druhého z jeho rovnovážnej polohy označme y. pohybové rovnice pre telesá sú[10]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - k(x-y) \\ m\ddot{y} &= -ky + k(x-y) \end{aligned}$$

a teda (označíme $\omega_0^2 = k/m$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\omega_0^2 x + \omega_0^2 y \\ \ddot{y} &= +\omega_0^2 x - 2\omega_0^2 y \end{aligned}$$

[10] Sily od krajných pružiniek sú kx a ky, predĺženie prostrednej pružiny je $x - y$. Znamienka do rovníc doplníme podľa toho, ktorým smerom má pôsobiť sila. Napríklad v prvej rovnice pre $x > 0$ a $y = 0$ pravá pružina teleso ťahá doľava a prostredná pružina sa rozťahuje a teda sila pôsobí tiež smerom doľava.

- našim cieľom bude nájsť (zatiaľ hocijaké) riešenie týchto rovníc, poučení prechádzajúcou časťou skúsime riešenie v tvare komplexného oscilovania

$$x = Xe^{i\omega t}\ ,\ y = Ye^{i\omega t}$$

dosadíme do rovníc a upravíme (v istom momente rovnice sčítame a odčítame) na

$$\begin{aligned}(\omega^2 - \omega_0^2)(X+Y) &= 0\\ (\omega^2 - 3\omega_0^2)(X-Y) &= 0\end{aligned}$$

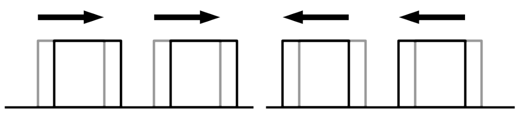
- tieto rovnice majú platiť súčasne, čo môžeme dosiahnuť dvomi spôsobmi

$$\omega^2 = \omega_0^2\ ,\ X = Y$$

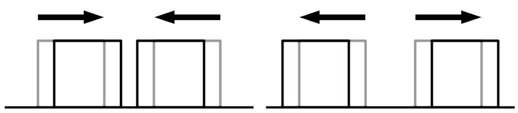
alebo

$$\omega^2 = 3\omega_0^2\ ,\ X = -Y$$

prvá možnosť je kmitanie oboch telies rovnako



druhá možnosť je kmitanie telies proti sebe



- nepokazili sme linearitu rovníc, takže môžeme spraviť kombinácie riešení s kladným a záporným znamienkom a dosať riešenia ako v prípade jedného oscilátoru

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{i\omega_0 t} + B_1 e^{-i\omega_0 t}\\ y(t) &= A_1 e^{i\omega_0 t} + B_1 e^{-i\omega_0 t}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}x(t) &= \ \ A_2 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + B_2 e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t}\\ y(t) &= -A_2 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} - B_2 e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t}\end{aligned}$$

týmto riešeniam sa hovorí módy

frekvencie kmitaní módov tiež dávajú zmysel

  - ω_0 je frekvencia ako na jednej pružinke, telesá kmitajú rovnako, pružina medzi nimi sa nenaťahuje a teda akoby tam ani nebola
  - $\sqrt{3}\omega_0$ je frekvencia ako na troch pružinách, telesá kmitajú proti sebe, teda prostredná pružina sa z pohľadu jedného telesa správa ako pružina polovičnej dĺžky a teda dvojnásobnej tuhosti

- avšak aj lineárna kombinácia módov je riešenie rovníc vďaka linearite, takže aj funkcie v tvare

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{i\omega_0 t} + B_1 e^{-i\omega_0 t} +\\ &+ A_2 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + B_1 e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t}\\ y(t) &= A_1 e^{i\omega_0 t} + B_1 e^{-i\omega_0 t} -\\ &- A_2 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} - B_1 e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t}\end{aligned}$$

sú riešeniami pohybových rovníc

takéto riešenie má 4 voľné parametre, ktorými potrebujeme zafixovať 4 počiatočné podmienky. výpočet potvrdí očakávania, že by sa to tým pádom mohlo dať jedným a iba jedným spôsobom

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{x_0 + y_0}{4} - i\frac{v_{x0} + v_{y0}}{4\,\omega_0} = \bar{B}_1\\ A_2 &= \frac{x_0 - y_0}{4} - i\frac{v_{x0} - v_{y0}}{4\sqrt{3}\omega_0} = \bar{B}_2\end{aligned}$$

- to znamená dve veci
  - žiadne iné riešenie rovníc existovať nemôže. ak by existovalo fyzika by mala problém, lebo ten istý experiment by mohol dopadnúť dva krát rôzne
  - riešenia vieme pre reálne počiatočné podmienky opäť napísať v explicitne reálnom tvare

$$\begin{aligned}x(t) &= X_0\cos(\omega_0 t + a) + Y_0\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + b)\\ y(t) &= X_0\cos(\omega_0 t + a) - Y_0\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + b)\end{aligned}$$

- aj keď boli módy jednoduché, všeobecné riešenie ktoré z nich vzniká je veľmi komplikované, lebo ide o súčet goniometrických funkcií s rôznou frekvenciou a amplitúdou

- na záver si všimneme jednu zaujímavé vec, počiatočné podmienky pre prvý aj druhý mód vyzerajú veľmi podobne ako počiatočné podmienky pre kmitanie jedného oscilátora v kombináciách $(x+y)/2$ pre prvý mód a $(x-y)/2$ pre druhý mód (aj s patričnou frekvenciou)

  to samozrejme nie je náhoda, sčítanie a odčítanie môžeme spraviť už na úrovni pohybových rovníc, čím dostaneme

$$m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\omega_0(x+y)$$
$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -3\omega_0(x-y)$$

  čo po predelí faktorom 2 dá presne to isté, že lineárna kombinácia súradníc $(x+y)/2$ sa správa ako jeden nezávislý harmonický oscilátor s frekvenciou ω_0 a lineárna kombinácia súradníc $(x-y)/2$ ako jeden nezávislý harmonický oscilátor s frekvenciou $\sqrt{3}\omega_0$

- okrem toho počet módov 2 samozrejme nebola náhoda a súvisí s počtom oscilátorov (a teda počtom stupňov voľnosti systému). podmienky pre ω, X, Y sa dajú prepísať ako kvadratická rovnica pre ω^2

$$\left(\omega^2\right)^2 - 4\omega^2\omega_0^2 + 3\left(\omega_0^2\right)^2 = 0$$

  ktorá dá samozrejme tie isté riešenia

Ponaučenie na záver a literatúra

- pripomeňme ešte raz, čo sa to vlastne dialo

  riešili sme fyzikálne rovnice, v ktorým pôvodne vystupovali reálne premenné. avšak sa ukázalo byť užitočné dovoliť premenným byť komplexnými. tak sme vedeli riešiť aj pôvodne veľmi ťažké problémy

  okrem toho sa ukázala byť veľmi užitočná metóda typovania riešení. ukázať, že niečo je riešenie rovnice a zväčša ľahšie, ako rovnicu vyriešiť. avšak za istých okolností sme vedeli ukázať, že iné ako nami natypované riešenie rovnica nemá

  na to bolo dôležité, že sme si vedeli v typovanom riešení nechať istú voľnosť, ktorou sme jeho tvar patrične prispôsobili potrebám tej ktorej rovnice

- a ako bodku splaťme jeden dlh z úvodu. štúdium harmonického oscilovania s jednoduchou odporovou silou sa môže zdať vcelku akademické. avšak spriahnuté oscilátory s odporom dokážu popísať obrovské množstvo javov. či už ide o spomínané kmitane pohára alebo hojdanie na hojdačke, alebo o komplikovanejšie veci ako statika stavieb či dynamika krištáľov.

  dôvodom na to je nasledujúce tvrdenie. akýkoľvek systém sa v blízkosti svojej stabilnej rovnováhy správa ako systém previazaných oscilátorov. dôvodom je, že akákoľvek komplikovaná sila je popísaná "pružinovou" silou $-kx$ blízko pri mieste kde $F=0$ (napríklad aj pre takú pružinu to platí iba približne)

  a keďže systémov, ktoré sú blízko pri svojej rovnováhe, je okolo nás neúrekom, aj vyššie popísaný aparát má široké uplatnenie

- ambicióznejší čitatelia môžu štúdiom ďalej pokračovať napríklad tu

  - *Základy fyziky*, moje prednášky pre študentov bakalárskeho programu matematiky, kde sa dá dočítať napríklad o maticovému prístupu k spriahnutým oscilátorom
  - *Halliday, Resnick, Walker - Fyzika*, veľmi dobre spracovaná kniha na úrovni, ktorej by mohli rozumieť aj šikovný stredoškoláci
  - *Feynmanove prednášky z fyziky*, stále jeden z najlepších zdrojov pre záujemcov o fyziku za stredoškolskou úrovňou
  - *Tirpák - Elektromagnetizmus*, v tomto kontexte zaujímavá 9. kapitola, kde sa podrobne rozpráva o symbolickej metóde riešenia RLC obvodov komplexnými číslami
  - *Tong - Dynamics and Relativity*, ak sa nebojíte angličtiny, tu sa dá tiež veľa naučiť