

Diferenciálne rovnice

Skúšková písomka

19.1.2017

Každá z úloh je za rovnaký počet bodov. Do hodnotenia písomky sa vám rátajú príklady 1-4. Bonusové príklady potom dávajú možnosť získať body nad zvyčajný rámec.

Príklad 1. Vyriešte nasledujúcu rovnicu

$$u_x^3 - u_y = u, \quad u(x, 0) = x.$$

Príklad 2. Nájdite riešenie nehomogénnej rovnice na intervale $(0, L)$

$$u_t - a^2 u_{xx} = -bu$$

s počiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

a okrajovou podmienkou

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0.$$

Príklad 3. Nájdite ohraňované riešenie Laplaceovej rovnice $\Delta u = 0$ v polguli

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2, x_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

s okrajovou podmienkou

$$u(x_1, x_2, 0) = 0, \quad u(x)|_{|x|=R, x_3>0} = 1.$$

Návod. Výsledok stačí uviesť v tvare integrálu alebo nekonečnej sumy, v ktorých už boli urobené všetky netriviálne úpravy.

Príklad 4. V priestore $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nájdite nasledujúce limity

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{itx} \text{PV} \frac{1}{x}.$$

Môže sa zísť, že

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Príklad 5 (Bonus.). Majme funkciu $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ na ohraničenej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ktorá spĺňa $-\Delta u \leq 0$ v celej oblasti. Dokážte, že

$$u(x) \leq \frac{1}{\text{vol } B(x, r)} \int_{B(x, r)} dy u(y) \quad \forall B(x, r) \subset \Omega .$$

Príklad 6 (Bonus.). Majme priestor medzi dvomi sférami s polomerami a, b pričom $b > a$. Tento priestor nech má jednotkový koeficient vedenia tepla, povrch vnútornej sféry nech je izolovaný a na povrchu vonkajšej sféry nech dochádza k výmene tepla s prostredím s teplotou T_0 . Na začiatku je rozdelenie teploty v našom priestore dané funkciou

$$T(r, \theta, \phi) = T_0 \cos(2\theta) .$$

- Nájdite rovnovážne rozdelenie teploty.
- Nájdite časový priebeh teploty zo zadaného počiatočného rozdelenia.

Prvé Legendrove polynómy, normalizácia a ďalšie vlastnosti

$$P_0(x) = 1 , \quad P_1(x) = x , \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) , \quad \int_{-1}^1 dx P_k(x) P_l(x) = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl} ,$$

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) = \text{nejaké číslo závislé od } l , \quad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) .$$