Letná škola fyziky 2019

Dynamika 2

Tieto materiály slúžili ako odklad pre prednášky na Letnej škole fyziky 2019. Nie som autorom väčšiny úloh ani ich vzorových riešení. Zdroje príkladov sú uvedené na konci textu. Uverejňujem ho len pre potreby účastníkov danej prednášky. Pre ďalšie použitie príkladov v tomto texte prosím kontaktujte priamo autorov uvedených zdrojov. Ďakujem.

Príklady na rozcvičku

1 Určitá sila udelí telesu s hmotnosťou m_1 zrýchlenie $12\,\mathrm{m/s^2}$, tá istá sila udelí telesu s hmotnosťou m_2 zrýchlenie $2\,\mathrm{m/s^2}$. Aké zrýchlenie udelí táto sila telesu s hmotnosťou $m_1 + m_2$?

$\boxed{1.}$ Budeme túto úlohu riešiť pre všeobecné zrýchlenia a_1, a_2. Zo zadania vyplýva, že

$$F = m_1 a_1, \qquad (1)$$
$$F = m_2 a_2. \qquad (2)$$

Ak zrýchlenie spojeného telesa označíme a, potom platí

$$F = (m_1 + m_2)a. \qquad (3)$$

Túto sústavu môžeme riešiť tak, že rovnicu (3) upravíme pomocou (1) a (2) na tvar

$$F = \left(\frac{F}{a_1} + \frac{F}{a_2}\right) a,$$

odkiaľ

$$a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{12}{7}\,\mathrm{m/s^2}.$$

2 Teplovzdušný balón hmotnosti M klesá nadol so zrýchlením a. Akú časť

hmotnosti balóna (vo forme sáčkov s pieskom) treba z balóna vyhodiť, aby stúpal so zrýchlením a nahor?

$\boxed{4.}$ Ak balón klesá nadol, je zrejmé, že gravitačná sila prevažuje nad silou F, ktorá nadľahčuje balón. Pre silu F môžeme písať:

$$Ma = Mg - F. \qquad (1)$$

Ak naopak balón stúpa, prevažuje nadľahčovacia sila F nad gravitačnou. Ešte si treba uvedomiť, že odhodením sáčkov sa nezmení nadľahčovacia sila F a že odhodené sáčky mali hmotnosť m a preto má balón teraz hmotnosť $M - m$. Potom:

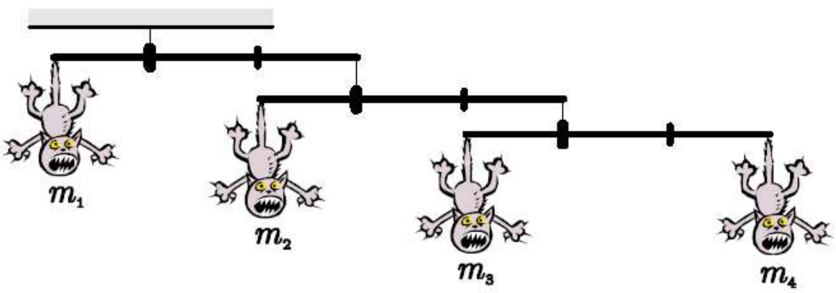
$$(M - m)\,a = F - (M - m)g. \qquad (2)$$

Riešením rovníc (1) a (2) dostávame

$$m = \frac{2Ma}{a + g}.$$

3 Majme dva kvádre s hmotnosťami *M* a *m*, položené na vodorovnej hladkej podložke a spojené nehmotným, nenatiahnuteľným lanom. Teleso s hmotnosťou *m* za rovnaké lano ťaháme silou *F*. Aké sú zrýchlenia telies a sily v každom z lán? Uvažujte prípad s trením aj bez trenia.

4 Na obrázku je znázornená sústava troch tyčí, ktoré sú uchytené v jednej tretine svojej dĺžky. Na konci tyčí sú zavesené mačky rôznych hmotností. aký musí byť pomer hmotností $m_1 : m_4$ prvej a štvrtej mačky, aby bola celá sústava v rovnováhe?

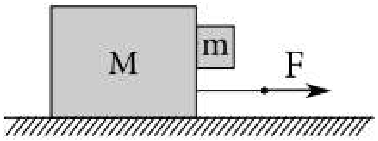


$\boxed{2.}$ Úvahu treba začať mačkami 3 a 4. Aby boli tieto v rovnováhe, musí platiť, že momenty síl sú v rovnováhe, teda $m_3 \cdot l/3 = m_4 \cdot 2l/3$, a pre pomer hmotností platí $m_3 = 2m_4$. Teda ľavá mačka musí byť 2-krát ťažšia ako pravá. Analogicky $m_2 = 2(m_3 + m_4) = 6m_4$. A konečne $m_1 = 2(m_2 + m_3 + m_4) = 18m_4$.

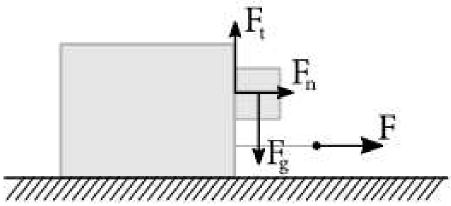
Pohybové rovnice

5 Teleso hmotnosti m je položené na naklonenej rovine so sklonom α. S akým rýchlením sa bude pohybovať, ak medzi ním a rovinou nie je žiadne trenie?

6 Kúzelníci Žaba a Jano si pripravili nový trik, „levitujúcu kocku". Na začiatku položili na ľad veľkú kocku s hmotnosťou M, k nej priložili „levitujúcu" kocku s hmotnosťou m, a ihneď začali ťahať za lano pripevnené k veľkej kocke ako na obrázku. Akou minimálnou silou F musia ťahať, aby sa im trik vydaril, ak vedia, že koeficient trenia medzi kockami je f?



14 Prvoradé je vedieť, aké sily pôsobia v našej sústave, špeciálne, aké sily pôsobia na „levitujúcu" kocku.



V horizontálnom smere pôsobí iba normálová sila F_n od veľkej kocky. Pohybová rovnica[1] v horizontálnom smere pre „levitujúcu" kocku má teda tvar

$$ma = F_n.$$

[1] Prakticky iba 2. Newtonov zákon

Vo vertikálnom smere pôsobia dve sily, gravitačná $F_g = mg$, a trecia $F_t \leq fF_n$. Keďže nás zaujíma prípad, kde sa „levitujúca" kocka nebude pohybovať vo vertikálnom smere, s určitosťou musí platiť rovnosť síl

$$F_g = F_t \Rightarrow mg \leq fF_n.$$

Posledný dielik puzzle je pohybová rovnica celého systému. Obe kocky sa hýbu so zrýchlením a v horizontálnom smere a jediná vonkajšia sila, ktorá na nich pôsobí je sila F, ktorou pôsobia Žaba s Janom na lano, takže

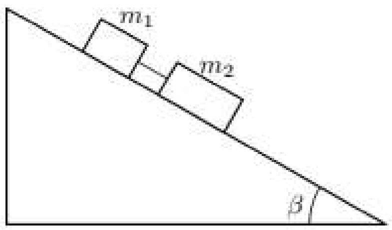
$$(m + M)\, a = F.$$

Spojením všetkých troch pohybových rovníc dostávame podmienku pre silu F

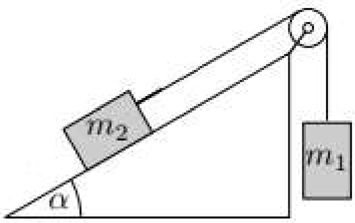
$$F \geq (m + M)\,\frac{g}{f},$$

a teda najmenšiu hodnotu má F vtedy, ak nastane rovnosť.

7 Majme dve telesá spojené niťou ako na obrázku. Za akých podmienok je niť napnutá a aké je v takom prípade zrýchlenie telies?



8 Majme dve telesá ako na obrázku. Aké je zrýchlenie každého z nich?



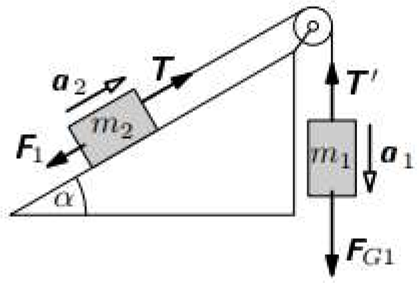
Zvolme směr $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ podle obrázku 20. Do obrázku pro zjednodušení zakreslíme jen ty síly, které mají pohybový účinek – tíhovou sílu $\boldsymbol{F}_{G1}$ působící na visící těleso a sílu $\boldsymbol{F}_1$, což je pohybová složka (rovnoběžná s nakloněnou rovinou) tíhové síly $\boldsymbol{F}_{G2}$ působící na ležící těleso. Tahové síly působící na koncích vlákna

označíme $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$, podle (8) musí platit $T = T'$. Nyní můžeme napsat pohybové rovnice pro obě tělesa a rovnici vlákna

$$m_1 a_1 = m_1 g - T\,,$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g \sin\alpha + T\,,$$

$$a_1 = a_2\,.$$



Obr. 20

Opět se jedná o soustavu tří rovnic o třech neznámých a_1, a_2, T. Pro souřadnice zrychlení dostaneme

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2}\, g\,.$$

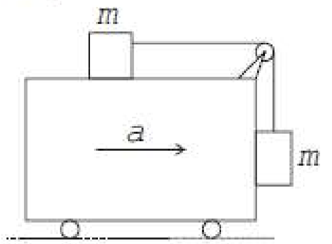
Soustava se bude pohybovat označeným směrem, pokud bude $a_1 > 0$, neboli

$$\frac{m_1 g - m_2 g \sin\alpha}{m_1 + m_2} > 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 > m_2 \sin\alpha\,.$$

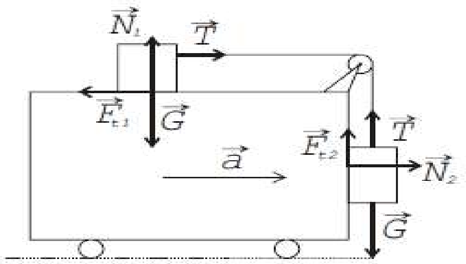
Pokud platí $m_1 < m_2 \sin\alpha$, bude se soustava pohybovat opačným směrem. V případě rovnosti $m_1 = m_2 \sin\alpha$ zůstane soustava v klidu.

Na závěr spojme všechny naše znalosti a vyřešme následující dva příklady.

9 S akým zrýchlením a sa má pohybovať vozík, aby sa telesá rovnakej hmotnosti m voči nemu nehýbali? Koeficient trenia je μ. Uvažujeme trenie na oboch stenách vozíka - prednej aj vrchnej.



11. Ako vidíme z obrázka



na teleso 1 pôsobí sila špagátu $\vec{T}$, sila podložky $\vec{N}_1$, trecia sila $\vec{F}_{t1}$, teda pohybová rovnica má tvar

$$\begin{aligned} \text{v smere osi } x &: \quad T - F_{t1} = ma_1 \\ \text{v smere osi } y &: \quad N_1 - mg = 0 \end{aligned}$$

Na teleso 2 pôsobí sila špagátu $\vec{T}$, sila podložky $\vec{N}_2$, trecia sila $\vec{F}_{t2}$. Potom pohybová rovnica je

$$\begin{aligned} \text{v smere osi } x &: \quad N_2 = ma \\ \text{v smere osi } y &: \quad mg - T - F_{t2} = ma_2 \end{aligned}$$

Kinematická väzba medzi zrýchleniami a_1 a a_2 je vyjadrená vzťahom $a_1 = a + a_2$. Ak predpokladáme, že teleso sa pohybuje, vtedy

$$F_{t1} = \mu N_1 \qquad F_{t2} = \mu N_2$$

Riešením týchto rovníc dostávame

$$a_2 = \frac{(1-\mu)g - (1+\mu)a}{2}$$

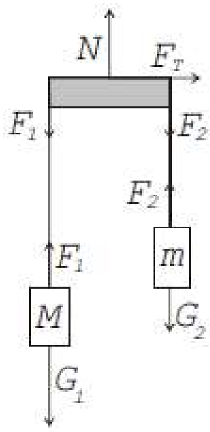
Z nerovnosti $a_2 < 0$ dostávame, kedy nie je splnená podmienka pohybu, teda pre

$$a > \frac{1-\mu}{1+\mu} g$$

10 Dve závažia s hmotnosťami $m = 1\,\mathrm{kg}$ a $M = 2\,\mathrm{kg}$ sú spojené šnúrkou, ktorá je prevesená cez dosku. Koeficient trenia medzi doskou a šnúrkou je $\mu = 0,5$. Aké je zrýchlenie tejto sústavy?

rovnosti momentov y-súradnicu ťažiska. $M = 6y = 13a$. Teda $y = \frac{13}{6}a$. $\boxed{21.}$ Označíme si sily podľa obrázku. $G_1 = Mg$, $G_1 = mg$. Vo všeobecnosti platia tieto pohybové rovnice.

$$\begin{aligned} ma &= F_2 - G_2 \qquad & Ma &= G_1 - F_1 \\ N &= F_1 + F_2 \qquad & F_1 &= F_T + F_2 \end{aligned}$$

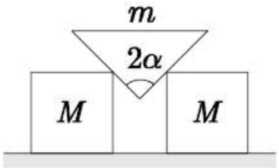


Predpokladajme, že sa sústava hýbe. Vtedy $F_T = \mu N$. Riešením sústavy dostaneme:

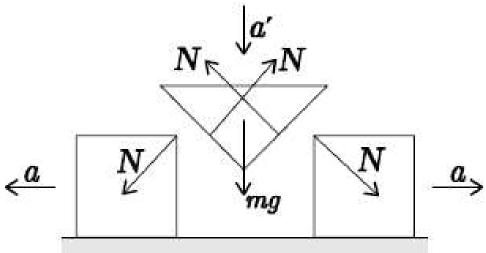
$$a = g\left(1 - \frac{m}{M}\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)$$

Pri našich hodnotách je výsledok $a = -0,5g$, teda nereálny výsledok, pretože sme predpokladali kladné zrýchlenie (ľahšie závažie nepotiahne to ťažšie...). Výsledok máme taký, lebo sme treciu silu uvažovali rovnú μN. Je však menšia ako μN, ale aj tak nedovolí sústave hýbať sa. teda výsledok je $a = 0\,\mathrm{m/s^2}$. $\boxed{22.}$ Celý ciferník (12 hodín) má uhol 360°. O 7^{38}

11 Na vodorovnom povrchu stoja dve rovnaké kocky hmotnosti M. Medzi kockami sa nachádza klin hmotnosti m s vrcholovým uhlom 2α. Vypočítajte zrýchlenia kociek. Trenie neuvažujte.



24. Na kocku pôsobí zo strany klinu pôsobí na kocku sila N. Taká istá sila opačného smeru pôsobí zo strany kocky na klin. Na obrázku sú znázornené sily, pôsobiace na jednotlivé telesá:



Newtonova pohybová rovnica pre klin má v zvislom smere tvar

$$mg - 2N\sin\alpha = ma', \tag{1}$$

kde a' je zrýchlenie klinu. Pre kocku budeme písať pohybovú rovnicu vo vodorovnom smere:

$$N\cos\alpha = Ma, \tag{2}$$

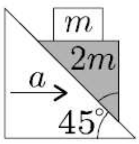
kde a je zrýchlenie kocky. Zrýchlenia a a a' nie sú nezávislé, ale sú viazané vzťahom

$$a = a' \operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

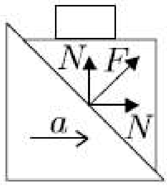
Riešením rovníc (1)–(3) dostávame

$$a = \frac{mg\operatorname{tg}\alpha}{m + 2M\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

12 Na obrázku je sústava hranolov (oba majú sklon 45°). Zrýchlenie väčšieho hranola udržujeme veľkosti a. Akou veľkou silou na seba pôsobia hranoly s hmotnosťami $2m$ a m? Trenie je všade nulové.



$\boxed{33.}$ Označme F veľkosť sily, ktorou pôsobí veľký hranol na teleso s hmotnosťou $2m$. Jej priemety do vodorovného a zvislého smeru nech majú veľkosť N (rovina má sklon $45°$, preto budú obe rovnako veľké).

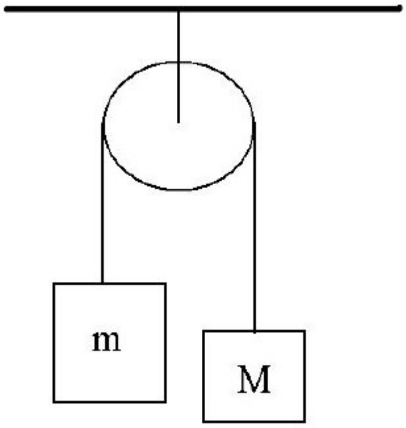


Označme a_v a a_z zrýchlenia, ktorými sa v dôsledku pôsobenia sily F pohybuje teleso hmotnosti $2m$ vo vodorovnom, resp. zvislom smere. Kladné smery týchto zrýchlení zvoľme doprava a hore. Potom $a_z = N/3m$ a $a_v = N/2m$ (sila N v druhej rovnici nerozbieha horné teleso, preto tu vystupuje iba $2m$). Pozrime sa teraz na celú situáciu zo sústavy pevne spojenej s veľkým hranolom. Sily, ktoré pôsobia na hranol hmotnosti $2m$ vyvolávajú štyri rôzne zrýchlenia. Gravitácia udeľuje zrýchlenie g nadol, zotrvačná sila zrýchlenie a doľava (má pôvod v neinerciálnej sústave, do ktorej sme sa preniesli) a ostávajú aj už spomínané zrýchlenia a_z a a_v. Lenže v tejto sústave sa teleso môže pohybovať iba v smere naklonenej roviny (má sklon $45°$), na ktorej je položené, čiže $a_z - g = a - a_v$. Riešením tejto rovnice dostávame $N = \frac{6}{5}m(a+g)$. Po dosadení do horeuvedeného vzťahu pre a_z dostaneme $a_z = \frac{2}{5}(a+g)$. Už si len stačí uvedomiť, že obe telesá (m aj $2m$) sa musia pohybovať rovnakým zrýchlením. Potom je zrejmé, že aby sa teleso s hmotnosťou m pohybovalo týmto zrýchlením, musí naň pôsobiť sila veľkosti

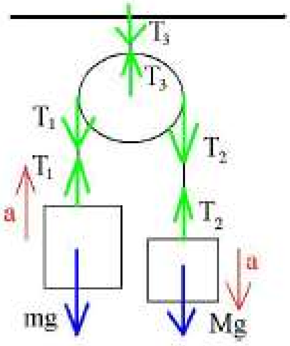
$$\frac{2}{5}m(a+g).$$

Kladky

13 S akým zrýchlením sa budú pohybovať tieto dve telesá a akou silou bude napínané lano medzi nimi?



Ako teda vyzera spravne riesenie? V prvom rade obe telesa sa musia pohybovat s rovnakymi zrychleniami, jedno nahor a druhe nadol. V tomto pripade sa dlzka lana nebude menit. Potom oznacime tah v jednej casti lana T_1 a tah v druhej casti lana T_2 a nakreslime obrazok



Vsimnite si ze tu nemozme len tak pisat $T_1 = T_2$ nakolko nasa uvaha s trpaslikmi tu nemusi platit koli klatke. Uz sme ale naznacili, ze ka by na kladku musi posobit nulovy moment sily, co rovnost sil T_1 a T_2 znamena. Oznacme teda $T = T_1 = T_2$. Z toho, ze aj vyslednica sil posobiacich na kladku musi byt nulova potom dostaneme $T_3 = 2T$. Nic nam teda nebrani napisat si pohybove rovnice pre obe telesa

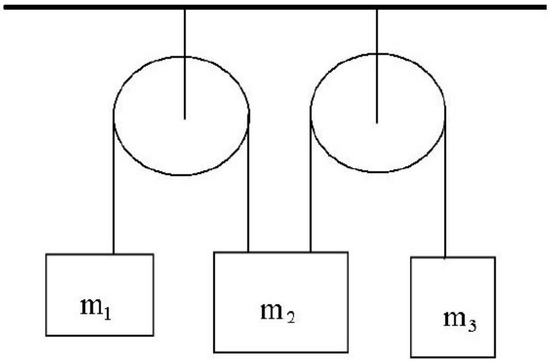
$$\begin{aligned} hmotnost \times zrychlenie &= vyslednica\ posbiacich\ sil \\ Ma &= Mg - T \\ ma &= T - mg \end{aligned}$$

Tuto sustavu opat vyriesime a dostaneme

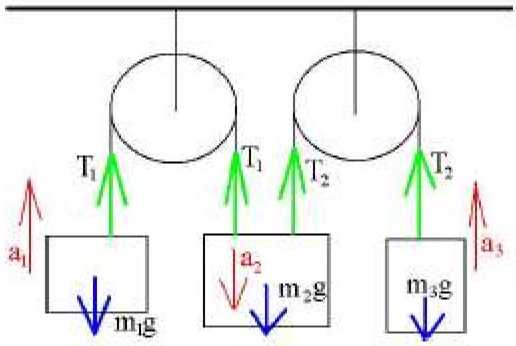
$$a = \frac{M-m}{M+m}g$$
$$T = 2\frac{mM}{M+m}g$$
$$T_3 = 2T = 4\frac{mM}{M+m}g$$

Vidime, ze tieto vztahy uz prejdu vsetkymi testami spravnosti. Ak $m = M$ sustava sa nehybe, ak $m = 0$ alebo $M = 0$ potom $a = g$ a telesa volne padaju. V tomto pripade tiez $T_3 = 0$, co pri volnom pade ocakavame.

14 Vypočítajte zrýchlenie každého z nasledujúcich telies.



Riesenie. V obrazku si oznacime sily



Ked sa teleso 1 posunie o vzdialenost x nahor, o rovnaku vzdialenost klesne teleso 2 nadol. Aby sa toto nezacalo otacat, musi aj jeho druha strana klesnut o x nadol a teda teleso 3 o x nahor. Z toho dostavame $a_1 = a_2 = a_3$. Pohybove rocnice preto vyzeraju

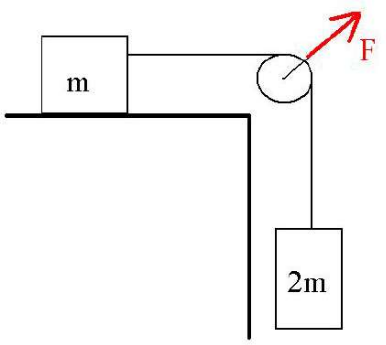
$$\begin{aligned} m_1 a &= T_1 - m_1 g \\ m_2 a &= -T_1 - t_2 + m_2 g \\ m_3 a &= T_2 - m_3 g \end{aligned}$$

S riesenim

$$a = \frac{m_2 - m_1 - m_3}{m_2 + m_1 + m_3} g$$

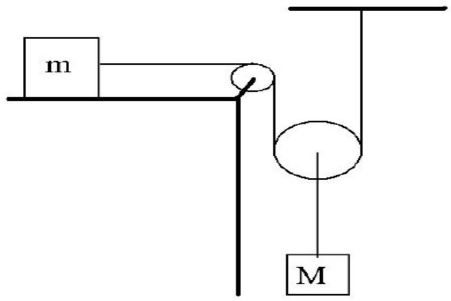
Vsimnime si, ze pre $m_1 + m_3 > m_2$ dostavame zaporny vysledok a teda teleso 2 pohybujuce sa nahor. To sme ocakavali, lebo v tomto pripade su krajne telesa tazsie a vytiahnu stredne teleso nahor.

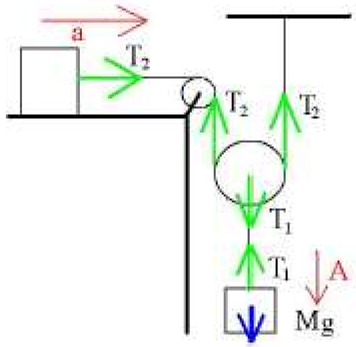
15 S akým zrýchlením sa bude pohybovať táto sústava akou silou treba držať kladku?



Vysledok. $a = \frac{2}{3}g, F = \frac{2\sqrt{2}}{3}mg$

16 Nájdite zrýchlenie nasledujúcej sústavy.



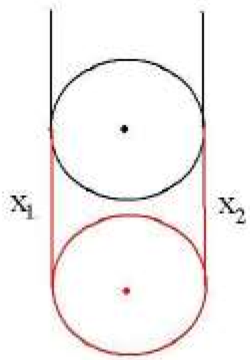


Pohybove rovnice nam hovoria

$$\begin{aligned} MA &= Mg - T_1 \\ ma &= T_2 \end{aligned}$$

K tomu dostavame $2T_2 = T_1$. Avsak tentoraz nebude platit $A = a$.

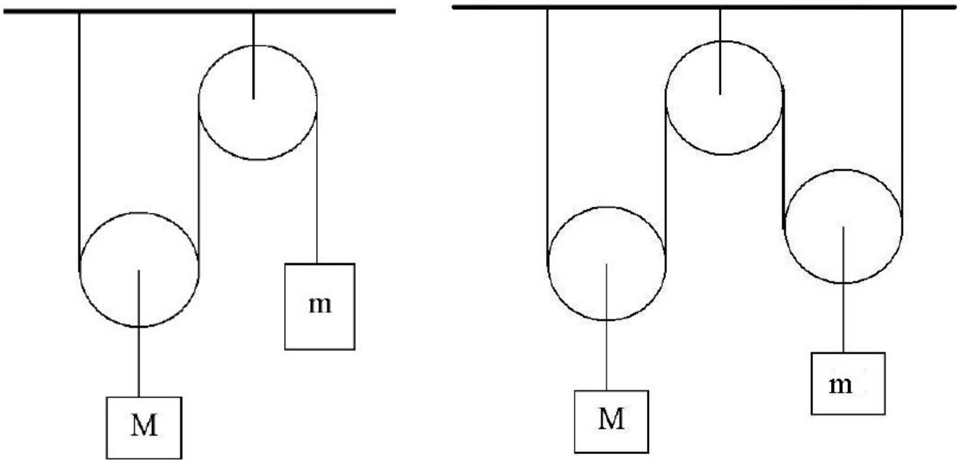
Poztime sa, co sa stane ked sa teleso s hmotnostu m posunie o x do prava. Kedze lano musi byt neustale napnute, ale nesmie sa predlzit, kladka musi tiez klesnut. Pohladom na obrazok a trochou uvazovania dojdeme k zaveru, ze kladka mnusi klesnut o $x/2$.[2]



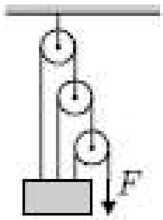
Tak dosiahneme, aby sa odmotana dlzka lana opat napla, ale nepredlzila. Platit preto bude $A = a/2$. Ak toto teraz dosadime do rovnic a tie vyriesime, dostaneme

$$\begin{aligned} A &= \frac{M}{4m+M}g \\ a &= \frac{2M}{4m+M}g \end{aligned}$$

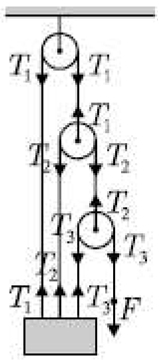
17 Nájdite zrýchlenie nasledujúcich sústav.



18 Majme nasledujúcu sústavu kladiek, ktorých hmotnosti považujte za zanedbateľné. Akou silou musíme pôsobiť na pravé lano, aby sme udržali v rovnováhe teleso hmotnosti m, o ktoré sú uchytené laná zo všetkých troch kladiek?



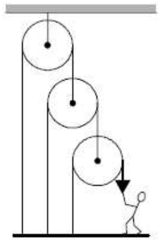
$\boxed{5.}$ Označme sily napätia v lanách T_1, T_2, T_3.

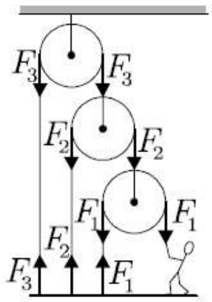


Ak je sústava v rovnováhe, výslednica síl pôsobiacich na každé teleso je nulová. Čiže

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 2T_2 \\
T_2 &= 2T_3 \\
T_3 &= F \\
T_1 + T_2 + T_3 &= mg
\end{aligned}
$$

19 Akou silou sa musí človek hmotnosti m držať na tomto systéme kladiek?

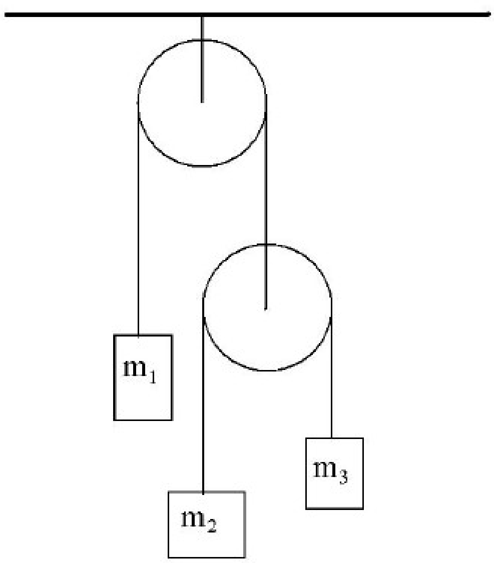




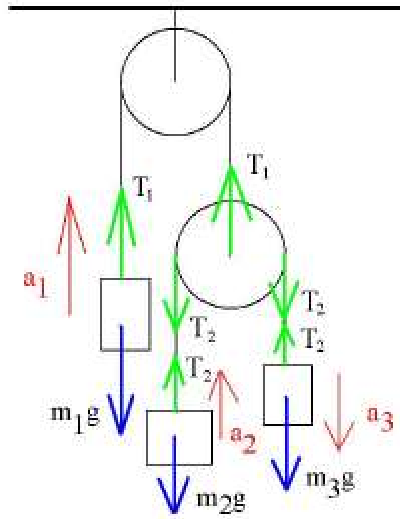
Kladky sú nehmotné, a preto pre tie, ktoré nie sú pevne ukotvené, musí platiť, že výslednica síl na ne pôsobiaca je nulová. Tým dostávame $T_2 = 2T_1$, $T_3 = 2T_2 = 4T_1$. Preto ak človek ťahá za špagát silou T_1, celkovo ťahá celú sústavu smerom hore silou $T_1 + T_1 + 2T_1 + 4T_1 = 8T_1$. Na to, aby sa udržal, musí byť teda splnené

$$T_1 = \frac{mg}{8}.$$

20 Aké sú zrýchlenia všetkých troch telies na obrázku?



Riesenie. Tak podme na priklad pekne priamociaro. Nakreslime si obrazok a do neho sily a zrychlenia.



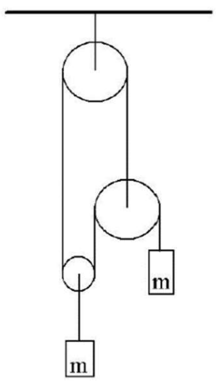
Rychlo dostavame $T_1 = 2T_2$, avsak dalej to uz nebude take jednoduche. Pozrime sa co sa stane, ak sa teleso 1 posunie o x nahor. Potom sa o rovnaku vzdialenost musi posunut volna kladka nadol. Teraz nech sa posunie teleso 2 o y nahor. Teleso 3 sa teraz musi posunut o $2x + y$ nadol, aby lano spajajuce telesa 2 a 3 prilahlo na volnu kladku. Inak by niektore z lan muselo zmenit svoju dlzku, co pocas celeho textu nepripustame. Dostavame teda $a_3 = a_2 + 2a_1$. Mame teda nasledujucu sadu styroch rovnic

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= 2T - m_1 g \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g \\ -m_3 a_3 &= T - m_3 g \\ a_3 &= a_2 + 2a_1 \end{aligned}$$

Nechame na citatelovi doriesit tuto sustavu k rieseniu

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-m_1 m_2 - m_1 m_3 + 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g \\ a_2 &= \frac{-m_1 m_2 + 3m_1 m_3 + 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g \\ a_3 &= 2\frac{-m_1 m_2 - m_1 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g \end{aligned}$$

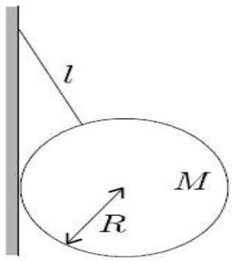
21 Ako sa budú pohybovať telesá v nasledujúcej sústave? Aké budú mať zrýchlenia?



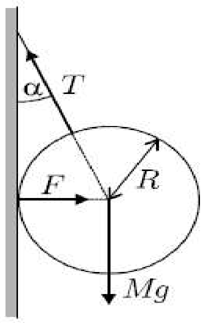
Statické úlohy

22 Na naklonenej rovine so sklonom α je položené teleso s hmotnosťou *m*. Medzi telesom a rovinou je trenie s koeficientom *f*. Za akých podmienok sa teleso nebude šmýkať dolu naklonenou rovinou?

23 Akou veľkou silou F pôsobí guľa na zvislú stenu(pozri obr.)? $R = 5m$, $l = 8m$, hmotnosť gule je M. Trenie je nulové.



31. Najprv usúdime, že priamka, ktorá vznikne mysleným predĺžením špagátu, musí prechádzať stredom gule.



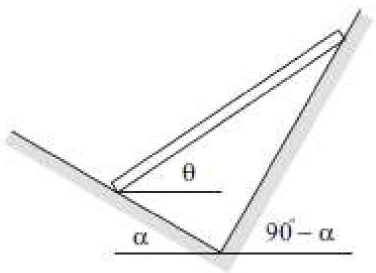
Stačí, aby sme si uvedomili, že súčet momentov síl vzhľadom na ľubovoľný bod musí byť nulový (inak by sa guľa otáčala). Vzhľadom na stred gule majú tiažová sila a reakcia od steny moment nulový, sila T teda musí mať tiež nulový moment. Ostávajú nám už len rovnováhy síl vo vodorovnom a zvislom smere. Rozložíme silu T na zložky a zapíšeme:

$$\begin{aligned} T \sin\alpha &= F \\ T \cos\alpha &= Mg \end{aligned}$$

z čoho $F = Mg \tan\alpha$, pre uhol α zase z krásneho pravouhlého trojuholníka vieme napísať $\sin\alpha = \frac{R}{l+R} = \frac{5}{13}$ a ak si spomenieme na súčtové vzorce, rozšírime našu bázu znalostí o poznatok $\cos\alpha = \dfrac{12}{13} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{5}{12} \Rightarrow F = \dfrac{5}{12}Mg$.

24 Rovnaké usporiadanie ako v predchádzajúcej úlohe, ale s trením medzi guľou a stenou. V akom intervale môže byť uhol, ktorý zviera lano a stena?

25 Tyč sa opiera o dve hladké roviny so sklonmi α, $90^\circ - \alpha$. Nájdite uhol ϑ, keď je tyč v rovnováhe.



odkiaľ $l = 225\,\mathrm{km}$. $\boxed{15.}$ Teleso je v rovnováhe, keď súčet síl je nulový aj výsledný moment síl je nulový. Na tyč pôsobia okrem gravitačnej sily $\vec{G}$ sily podložky $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, kolmé na podložku. Keď podmienku $\vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$ prepíšeme do vodorovnej a zvislej projekcie, dostávame

$$\begin{aligned} N_1 \sin\alpha - N_2 \sin(90^\circ - \alpha) &= 0 \\ N_1 \cos\alpha + N_2 \cos(90^\circ - \alpha) - G &= 0 \end{aligned}$$

Podmienka nulovosti momentu síl (vzhľadom na ťažisko tyče) je

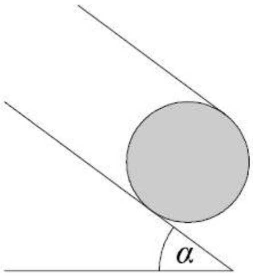
$$N_1 \frac{l}{2} \cos(\alpha + \vartheta) - N_2 \frac{l}{2} \sin(\alpha + \vartheta) = 0$$

Riešením prvej a tretej rovnice dostávame

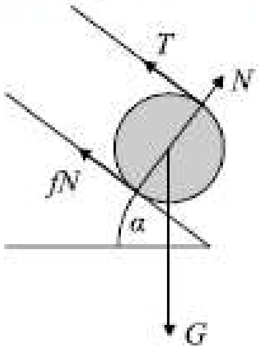
$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \vartheta)$$

odkiaľ pomocou súčtového vzorca pre tg dostávame $\vartheta = 90^\circ - 2\alpha$.

26 Valec je položený na naklonenej rovine so sklonom α. Na ňom je namotaná tenká niť, ktorá je mimo valca rovnobežná s rovinou a nakoniec upevnená. Aký najmenší môže byť koeficient f statického trenia medzi valcom a naklonenou rovinou, aby sa valec nezačal šmýkať nadol?



$\boxed{11.}$ Aby bol valec v pokoji, musí byť vektorový súčet síl, ktoré naň pôsobia, rovný nule. Označme tiažovú silu pôsobiacu na valec ako G, silu napínajúcu špagát ako T a kolmú reakciu naklonenej roviny ako N. Zaujíma nás hraničný prípad, keď je veľkosť trecej sily medzi valcom a naklonenou rovinou rovná fN.



V smere rovnobežnom aj kolmom na rovinu musí byť súčet pôsobiacich síl rovný nule, preto

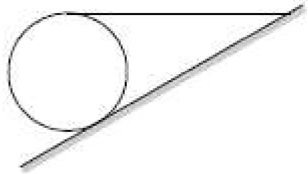
$$\begin{aligned} G \sin\alpha - fN - T &= 0 \\ N - G\cos\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Aby sa valec neotáčal, musí byť nulový aj výsledný moment všetkých síl, pričom nezáleží na tom, vzhľadom na ktorý bod ho počítame. Ak si ako vzťažný bod vyberieme stred podstavy valca, jediné dve sily s nenulovým (navzájom opačným) momentom budú fN a T. Ich ramená sú rovnako veľké, preto sa musia rovnať aj ich veľkosti.

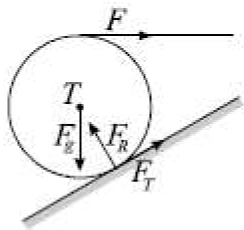
$$T = fN$$

Riešením sústavy týchto troch rovníc dostaneme najmenší potrebný koeficient trenia $f = \frac{1}{2}\tan\alpha$.

27 Aká veľká sila napína vodorovnú niť udržujúcu homogénny valec na naklonenej rovine na obrázku? Sklon naklonenej roviny je α, hmotnosť valca je m.



$\boxed{30.}$ Aby bol valec v pokoji, musí sa výslednica všetkých síl a aj výslednica všetkých momentov síl rovnať nule. Na valec pôsobí sila lana F, tiažová sila valca F_g, sila reakcie podložky F_r a trecia sila F_t.



Zrejme najvýhodnejšie bude napísať momentovú vetu vzhľadom na styčný bod podložky a valca. Vtedy majú nenulový moment len dve sily (tiažová sila valca a sila F). Zapísaním rovnosti týchto momentov síl dostávame

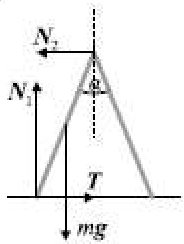
$$F(R + R\cos\alpha) = mgR\sin\alpha$$

odkiaľ

$$F = mg\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

28 Dve hracie karty sa opierajú vrchnými koncami o seba. Aký najmenší uhol α môžu tieto dve karty zvierať, ak koeficient trenia medzi nimi a podložkou je $f = 0,1$?

$\boxed{17.}$ Označme hmotnosť jednej karty ako m. Na každú z kariet budú pôsobiť štyri sily - tiažová, ktorej veľkosť je rovná mg, trecia sila T a v dotykových bodoch normálové sily N_1, N_2.



Nás zaujíma hraničná situácia, kedy $T = fN_1$.V rovnováhe musia byť súčty vodorovných aj zvislých síl rovné nule, preto

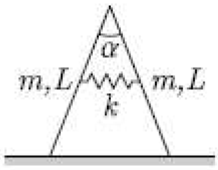
$$\begin{aligned} N_1 - mg &= 0 \\ fN_1 - N_2 &= 0. \end{aligned}$$

Podobná podmienka platí aj pre momenty síl, pretože keby bol výsledný moment počítaný vzhľadom na niektorý bod rôzny od nuly, karty by sa začali otáčať. V tomto príklade je výhodné počítať momenty síl vzhľadom na dotykový bod karty a podložky. Jediné dve sily, ktorých ramená sú rôzne od nuly sú tiažová sila a N_2. Ak označíme dĺžku karty ako l, platí

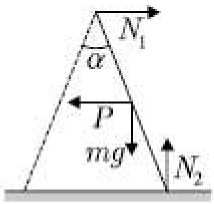
$$N_2 l \cos\frac{\alpha}{2} - mg\frac{l}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{mg}{2}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

Dosadením do prvých dvoch rovníc dostaneme hraničný uhol $\alpha = 2\arctan 2f \approx 22°37'$.

29 Na hladkej podložke je položený rebrík, ktorého stredy ramien sú spojené pružinou tuhosti k. Každé rameno má hmotnosť m a dĺžku L. Predpokladajme, že pružina má v základnom stave zanedbateľnú dĺžku. Aký bude rovnovážny uhol α medzi ramenami rebríka?



11. Zapíšme rovnice, vyjadrujúce rovnováhu, pre jedno rameno rebríka. Na rameno pôsobia štyri sily: gravitačná sila mg, sila pružiny $P = k\Delta x = kL\sin(\alpha/2)$, sila zo strany druhého ramena rebríka N_1, a sila zo strany podložky N_2.



Keďže rebrík je v rovnovážnom stave, súčet síl vo vodorovnom aj zvislom smere je nulový:

$$kL\sin\frac{\alpha}{2} = N_1 \qquad (1)$$

$$mg = N_2 \qquad (2)$$

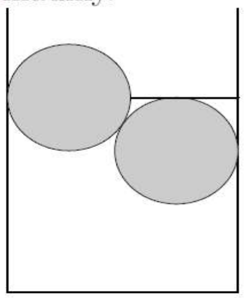
Výsledný moment síl vzhľadom na ľubovoľný bod je nulový – je výhodné zvoliť si stred rebríka

$$N_1\frac{L}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = N_2\frac{L}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

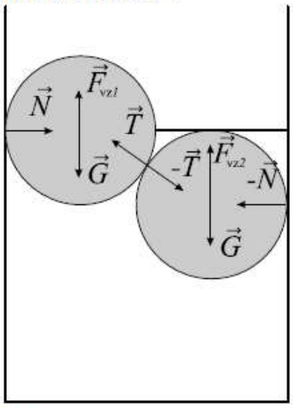
Riešením rovníc (1)-(3) dostávame

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{mg}{kL}$$

30 Akou silou pôsobia na steny úzkej nádoby dve brvná (obr.)? Hmotnosť každého dreva je 100 kg. Jedno brvno je do polovice ponorené vo vode, vrchná časť druhého sa dotýka vodnej hladiny.



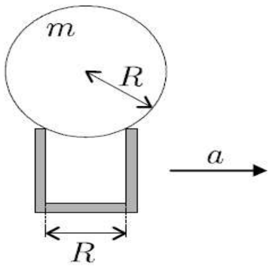
$\boxed{15.}$ Na každé brvno pôsobí sila zo strany nádoby $\vec{N}$, tiažová sila $\vec{G}$, vztlaková sila $\vec{F}_{vz}$ a sila zo strany druhého brvna $\vec{T}$.



Smer sily $\vec{T}$ určíme z pravouhlého trojuholníka, ktorého prepona je spojnicou stredov kružníc a jeho jedna odvesna je kolmá na hladinu. Prepona má dĺžku $2r$, odvesna dĺžku r, teda sila $\vec{T}$ zviera s horizontálou uhol 30°. V rovnováhe je súčet síl nulový. Pre ľavé brvno dostávame rovnice

$$\begin{aligned} V\rho_0 - mg - T\sin 30^\circ &= 0 \\ N - T\cos 30^\circ &= 0 \end{aligned}$$

31 Dokonale hladký homogénny valec s hmotnosťou m je položený na vozíku, ktorého vzdialenosť medzi prednou a zadnou stenou je rovnaká ako polomer podstavy valca R (pozri obr.). Vozík sa začne pohybovať so zrýchlením a. Nájdite veľkosti síl N_1 a N_2, ktoré pôsobia na zadnú a prednú stranu vozíka.

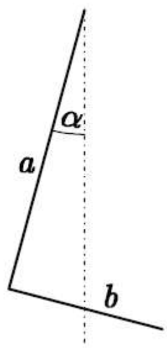


$\boxed{12.}$ Ak je valec dokonale hladký, musia sily N_1 a N_2 smerovať presne do stredu valca, takže ich momenty vzhľadom naň sú nulové (rovnako aj pre tiažovú a zotrvačnú silu). Potom stačí iba zapísať rovnice pre zvislé a vodorovné zložky síl, ktoré musia byť v rovnováhe, aby sa valec vzhľadom na vozík nepohyboval.

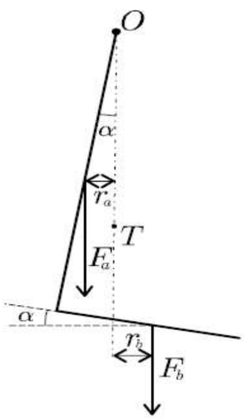
$$N_1 \sin 60° + N_2 \sin 60° = mg = (N_1 + N_2)\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$N_1 \cos 60° - N_2 \cos 60° = ma = \frac{(N_1 - N_2)}{2}$$

Po vyriešení sústavy dostaneme veľkosti $N_{1,2} = \frac{mg}{\sqrt{3}} \pm ma$.

32 Zalomená tyč tvaru L s ramenami z rovnakého materiálu dĺžky a, b je upevnená v koncovom bode ramena a tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, prechádzajúcej bodom upevnenia kolmo na rovinu určenú ramenami tyče. Aký uhol zviera rameno a zalomenej tyče so zvislým smerom k rovnovážnej polohe?



$\boxed{23.}$ Podmienka rovnováhy vyžaduje, aby
(a) bol vektorový súčet všetkých síl pôsobiacich na teleso rovný nule
(b) bol súčet momentov všetkých síl vzhľadom na ľubovoľný bod rovný nule
Podmienka (a) je splnená tým, že tiež tyče je kompenzovaná upevnením tyče v bode O. Podmienka (b) bude splnená, keď ťažisko, bude ležať na zvislej priamke prechádzajúcej bodom upevnenia.



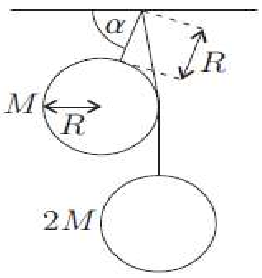
Môžeme si teda vypočítať polohu ťažiska a z toho uhol odklonu, alebo si hneď napíšeme podmienku rovnosti momentov (momenty, ktoré spôsobujú jednotlivé ramená, počítame vzhľadom na bod O)

$$\begin{aligned} r_a F_a &= r_b F_b, \\ \frac{a}{2}\sin\alpha\, F_a &= \left(\frac{b}{2} - a\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)\cos\alpha\, F_b. \end{aligned}$$

Sily F_a a F_b sú tiažové sily jednotlivých ramien, teda $F_a/F_b = a/b$. Riešením týchto rovníc nakoniec dostávame

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}.$$

33 Z vodorovného stropu visí na špagáte dĺžky R guľa s polomerom R a hmotnosťou M. Z rovnakého miesta visí na dostatočne dlhom špagáte druhá guľa s hmotnosťou $2M$. Gule sa nedotýkajú. Aký uhol zviera prvý špagát so stropom?



$\boxed{31.}$ Nakreslíme si obrázok a do neho sily, pôsobiace na prvú guľu. Ide o tiaťovú silu a ťah oboch lán. Zrejme platí $T' = 2Mg$, nakoľko spodná guľa je v pokoji a výslednica na ňu pôsobiacich síl je nulová. Sily pôsobiace na prvú guľu si rozložíme na vdorovné a zvyslé zložky, pričom kladný smer volíme do prava a nahor.

$$T_x = T\cos\alpha \quad , \quad T_y = T\sin\alpha$$
$$T'_x = -2Mg\cos\beta \quad , \quad T'_y = 2Mg\sin\beta$$

Z vyznačeného trojuholníka dostáva podmienku $\sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$. Výslednica síl pôsobiacich na guľu musí byť nulová vo zvyslom aj vodorovnom smere, takže

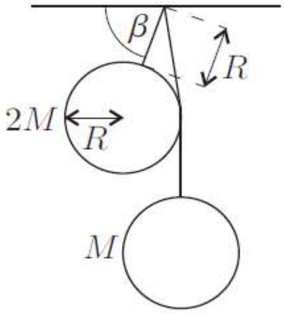
$$\begin{aligned} T\cos\alpha - 2Mg\cos\beta &= 0 \Longrightarrow T = 2Mg\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \\ T\sin\alpha + 2Mg\sin\beta - 3Mg &= 0 \Longrightarrow 2Mg\cos\beta\frac{\sin\alpha}{\cos a} + 2Mg\sin\beta = 3Mg \end{aligned}$$

Úpravou týchto rovníc nájdeme vzťah pre uhol α.

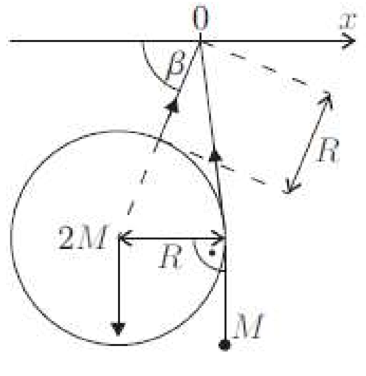
$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha &= \tfrac{3}{2}\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\cos\alpha - \frac{1}{3} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{9} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{2}{9}$$

34 Z vodorovného stropu visí na špagáte dĺžky R guľa s polomerom R a hmotnosťou $2M$. Z rovnakého miesta visí druhá guľa s hmotnosťou M, pričom jej špagát je dostatočne dlhý na to, aby sa gule nedotýkali. Medzi špagátom a prvou guľou je nulové trenie. Aký je uhol β, ktorý zviera prvý špagát so stropom?



$\boxed{28.}$ Využijeme veľmi rafinovane fakt, že sústava môže byť v pokoji len vtedy, ak je uchytená nad ťažiskom. Spoločné ťažisko oboch gúľ teda leží priamo pod bodom závesu. Teraz si ešte uvedomíme, že dlhší špagát pôsobí na povrch ťažšej gule kolmo, lebo trenie medzi ním a guľou je nulové. Nuž, a aby sa tá guľa nehýbala, tak určite moment síl vzhľadom na jej stred musí byť nulový. Sily od špagátu smerujú do stredu, takže ich moment sily je nulový; tiaž pôsobí v ťažisku, takže jej moment sily vzhladom na ťažisko je tiež nulový; nutne potom musí byť nulový aj moment sily pôsobiacej cez kratší špagát, na ktorom visí – to znamená, tento špagát musí tiež ťahať kolmo na jej povrch (a teda smerom od jej stredu).



Naložíme podmienku o spoločnom ťažisku do rovnice $2Mx_{2M} + Mx_M = 0$, pričom vieme že $x_{2M} = -2R\cos\beta$ resp. $x_M = x_{2M} + R$. Dosadením dostaneme $\beta = \arccos\frac{1}{6} \approx 80{,}41°$.

Otáčavé úlohy

35 Na naklonenú rovinu so sklonom α položíme plný valec s polomerom *R*. S akým zrýchlením sa valec rozbehne dole naklonenou rovinou, ak po nej neprešmykuje?

$$\ddot{x} = g \sin\alpha \times \frac{1}{1 + \frac{I_0}{mR^2}}$$

36 Rolku toaletného papiera chytíme za voľný koniec a pustíme. S akým zrýchlením sa bude v prvom momente po uvoľnení rolky pohybovať jej stred?

Riešenie. napiseme pohybovu rovnicu vzhladom na bod za ktory je zaveseny toaletak

$$I\varepsilon = Rmg \tag{3.138}$$

z toho dostaneme

$$\varepsilon = \frac{Rmg}{I_0 + mR^2} \tag{3.139}$$

a teda zrychlenie taziska bude (toaletak sa bude otacat tak, ze bod, za ktory je zaveseny bude mat nulove zrychlenie)

$$a = g\frac{1}{1 + \frac{I_0}{mR^2}} \tag{3.140}$$

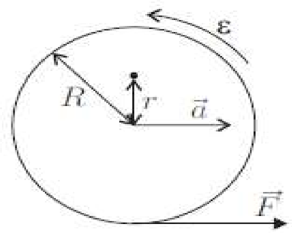
to je menej ako g, lebo okrem posuvnej energie sa mina energia aj na otacanie. z toho vieme doratat tahovu silu zavesenej casti toaletaku (celkova sila udava zrychlenie taziska)

$$mg - T = ma \quad \Rightarrow \quad T = mg\frac{I_0}{mR^2 + I_0} \tag{3.141}$$

lahko overime ze $TR = I_0\varepsilon$ ■

37 Planéta malého princa je homogénna guľa s polomerom R. Malý princ na jej povrch upevnil raketový motor, ktorý na ňu po zapnutí začne pôsobiť silou veľkosti F v smere dotyčnicovom k povrchu. V jeho planéte sa nachádza priamka, ktorej body majú v okamihu spustenia motora nulové zrýchlenie. Ako ďaleko od motora sa táto priamka nachádza?

$\boxed{23.}$ Situáciu budeme skúmať z inerciálnej vzťažnej sústavy, ktorej počiatok je pred zážihom motora v strede (ťažisku) planéty malého princa. Tá je výhodná preto, lebo v nej nemáme žiadne zotrvačné sily (lebo je inerciálna) a taktiež vektor do ťažiska je nulový a potom rovnica pre moment sily vyzerá veľmi príťažlivo (jednoducho). Potom v tejto sústave platí, že zrýchlenie ťažiska planéty je $a_T = F/m$ a uhlové zrýchlenie planéty je $\varepsilon = M/J$, kde $M = FR$ je celkový moment síl pôsobiacich na planétu a $J = \frac{2}{5}mR^2$ je jej moment zotrvačnosti.



My hľadáme priamku (kolmú na obrázok) takú, že jej zrýchlenie a je nulové. Ak je jej vzdialenosť od stredu planéty r, musí pre ňu platiť $a = a_T - \varepsilon r = 0$, z čoho ľahko nachádzame

$$r = \frac{a_T}{\varepsilon} = \frac{F/m}{FR/J} = \frac{2}{5}R.$$

Teraz si ešte treba uvedomiť fakt, že toto je vzdialenosť od stredu planéty a smeruje „preč“ od motora (inak by sa zrýchlenia sčitovali). Hľadaná vzdialenosť priamky od motora je $\frac{7}{5}R$.

38 Peťo hodil bowlingovú guľu rýchlosťou v rovno po dráhe s koeficientom trenia f. Dal jej však spätnú rotáciu s uhlovou rýchlosťou ω. Aká najmenšia musí byť táto uhlová rýchlosť, aby sa guľa po čase začala kotúľať naspäť? Polomer gule je R a jej hmotnosť je M.

$\boxed{28.}$ Ak sa bowlingová guľa pohybuje rýchlosťou v a má spätnú rotáciu ω, bod gule, ktorý sa dotýka bowlingovej dráhy, má rýchlosť $w = R\omega + v$ rovnakým smerom, ako stred gule. Preto trecia sila pôsobí na guľu opačným smerom. Jej veľkosť označme T. Trecia sila spomaľuje pohyb gule smerom dopredu a aj jej otáčavý pohyb. Zrýchlenie posuvného pohybu je T/M, uhlové zrýchlenie otáčavého pohybu je TR/I, kde I je moment zotrvačnosti gule. Rýchlosť a uhlová rýchlosť gule v čase t sú teda

$$v(t) = v - \frac{T}{M}t \qquad \text{a} \qquad \omega(t) = \omega - \frac{TR}{I}t.$$

Guľa sa začne pohybovať naspäť v prípade, že stred gule úplne zastane skôr, ako dotykový bod. Ten sa v takom prípade bude stále pohybovať smerom dopredu a trecia sila bude stále zrýchľovať guľu smerom dozadu. Dopredný pohyb gule zastane v čase $t' = \frac{Mv}{T}$ a bod dotyku bude mať v tom čase rýchlosť $R.\omega(t')$. Tá má byť stále dopredu, teda väčšia ako nula, čím dostávame podmienku

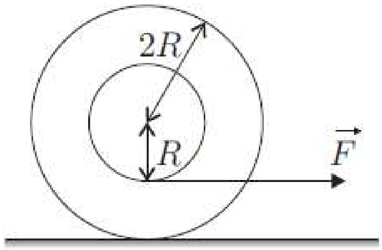
$$R\left(\omega - \frac{TR}{I}\frac{Mv}{T}\right) > 0$$
$$\omega > \frac{MR}{I}v.$$

Po dosadení vzťahu pre moment zotrvačnosti gule $I = \frac{2}{5}MR^2$ dostávame

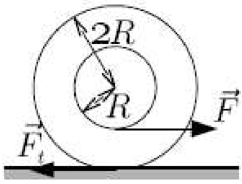
$$\omega > \frac{5}{2}\frac{v}{R}.$$

Ak poznáte zákon zachovania momentu hybnosti, môžete skúsiť vymyslieť aj kratšie riešenie.

39 Telekomunikačný kábel je navinutý na "cievke" s vnútorným polomerom R a vonkajším $2R$. Kábel je tenký, ale jeho hmotnosť M je oveľa väčšia ako hmotnosť cievky. Spojár Tomáš začne (zospodu cievky) ťahať kábel silou veľkosti F. Ktorým smerom a akým veľkým zrýchlením sa začne kotúľať cievka, ak je trenie medzi ňou a podložkou dostatočne veľké na to, aby nepremykovala?



$\boxed{29.}$ Kábel je tenký, preto Keďže hmotnosť cievky je sústredená v kábli, tak môžem smelo povedať, že moment zotrvačnosti je $J_T = \frac{1}{2}mR^2$. Ďalej viem, že cievka nepremykuje, preto v každom čase platí $a = 2R\varepsilon$. Kladný smer pre zrýchlenie a nech je v smere $\vec{F}$, potom kladný smer pre ε je v smere chodu ručičkových hodiniek.



Pohybové rovnice pre posuvný a rotačný pohyb

$$
\begin{aligned}
2mR\varepsilon &= ma = F - F_t \\
\frac{1}{2}mR^2\varepsilon &= J_T\varepsilon = 2RF_t - RF \\
&\Rightarrow F_t = \frac{3}{5}\,F \Rightarrow a = \frac{2F}{5m}
\end{aligned}
$$

Otáčavé úlohy

Zbierky úloh Náboja FKS

https://physics.naboj.org/archive.php

Študijne materiály českej fyzikálnej olympiády

http://fyzikalniolympiada.cz/texty/pohyb.pdf

http://fyzikalniolympiada.cz/texty/ulohy1.pdf