Pouzitie grafov (nielen) v kinematickych ulohach

Juro Tekel juraj(dot)tekel(at)gmail(dot)com

Poznamky k rozsirenej prednaske o tom, ako rychlo a efektivne riesit ulohy z jednoduchej kinematiky pomocou $t-v$ grafov a ako to moze pomoct aj pri inych druhoch uloh.

Jun 2010 *Lazy pod Makytou 2010*

Contents

---

1 Uvod

V tejto prenaske si ukazeme, ako sa daju velmi jednoducho a efektivne riesit mnohe ulohy pouzitim vhodneho grafickeho zobrazenia meniacich (a aj nemeniacich) sa velicin. Samozrejme si aj ukazame, preco tento sposob funguje a citatelovi odporucame priklady vyratat aj pouzitim 'konvencnych' metod. Ujasnenie si vztahu medzy tymito dvoma pristumi v konkretnych vypoctoch (ktory krok v jednom zodpoveda ktoremu kroku v druhom) je neocenitelne na ceste k hlbsiemu pochopeniu problemov a fyziky ako takej.

Problematika je na uvod velmi jednoducha a nevyzaduje ziadne znalosti, ktore by nemal starsi zakladoskolak. Prva kapitola preto moze byt vo vhodnej uprave (vynechanie niektorych formalnych krokov a zovseobecneni) dobrym materialom pre ziakov osmeho a deviateho rocnika zakladnej skoly. Text ako celok je potom vhodny pre prvakov, pripadne druhakov strednej skoly, avsak sikovny zakladoskolaci by s nim pri dobrom zvladnuti prvej casti nemali mat tiez problem.

Poznamky mozu byt pouzite ako material pre ucitela alebo aj ako text k samostudiu.

Zacneme jednoduchymi 'dopravnymi' ulohami, pri ktorych sa cela situacia lahko predstavuje. Avsak postupne sa prepracujeme k narocnejsim a tematicky viac roznorodym uloham.

Material ako taky je dostatocny na niekolko kratsich sedeni, pripadne s vynechanim niektorych narocnejsich uloh na jedno dlhsie sedenie. Hlavne v prvom pripade je pravdepodobne najlepsie po prvych niekolkych ulohach nechat studentov potrapit sa s ulohami samostane a az v pripade potreby im trochu pomoct alebo riesenie ukazat.

Zdroje prikladov ako aj odporucane citanie k tejto problematike je uvedene na zaver textu.

Priklady pochadzaju zvacsa zo zbierok FKS, FX, Naboja FKS a uloh Fyzikalnej Olympiady, autorom ktorych patri velka vdaka.

Co budeme potrebovat

Ako bolo spomenute, na tuto prednasku nebudeme potrebovat vela. Budeme potrebovat vediet vypocitat plochu niekotrych jednoduchych geometrickych utvarov ako stvorec, obdlznik, trohuolnik, lichobeznik, ...

Potom budeme potrebovat vediet, ze pre drahu, ktoru prejde teleso rovnomernym priamociarym pohybom rychlosti v za cas t plati

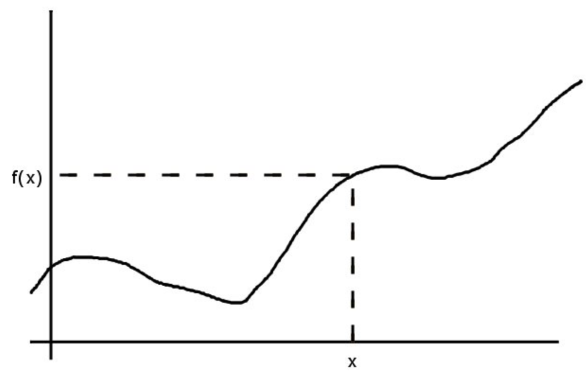
$$s = v \times t$$

Ak nas zaujima suradnica, ktoru teleso v takomto pripade ma, nesmieme zabudnut na jeho pociatocnu suradnicu x_0 a[1]

$$x(t) = v \times t + x_0$$

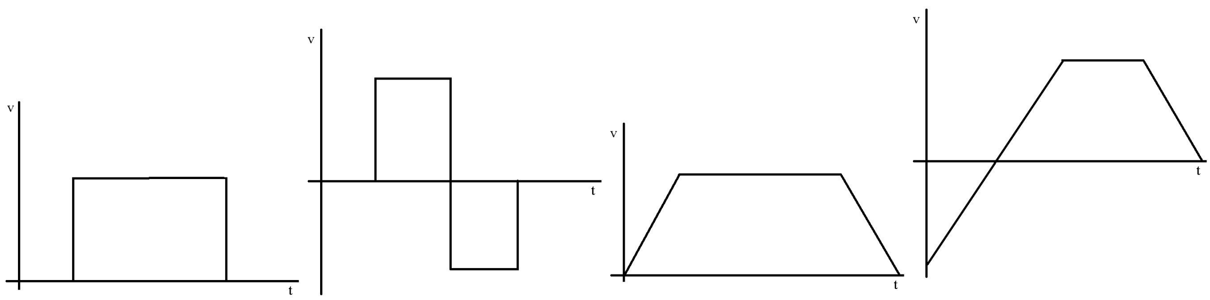
Je dobre premysliet si rozdiel v tychto dvoch vzorcoch.

Tiez bude potrebne vediet, co to znamena graf. Ak mame nejaku premennu x a velicinu f, ktora sa s touto premennou nejak meni, teda $f(x)$, potom nasledujuce cudo nazveme 'grafom funkcie f'.



Ciara, ktora je grafom, je teda tak vysoko nad vodorovnou osou, aka velka je pre to ktore x hodnota $f(x)$.

Priklad 1. *Rozhodnite, ako sa pohybuje teleso, pre ktore je rychlost dana nasledujucimi grafmi.*



V dalsej casti potom budeme potrebovat vediet, co je to rovnomerne zrychleny pohyb, s ktorym sme sa stretli aj v predchadzajucej ulohe. V tomto pripade sa rychlost telesa rovnomerne zvacsuje, teda

$$v(t) = a \times t + v_0$$

[1] V pripade ze nasledujuce oznacenie nie je zname, ak piseme $x(t)$, chceme tym povedat ze velicina x sa v case meni. Vseobecnejsie ak piseme $f(x)$, potom hodnota f zavisi od hodnoty x, tj. je funkciou x.

kde a je zrychlenie telesa a v_0 je rychlost, z ktorej zrychluje (pociatocna rychlost). Ak je a zaporne, teleso zrychluje opacnym smerom[2]. Pre drahu prejdenu za cas t v tomto pripade potom plati

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

a pre suradnicu v case t

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Tieto vztahy si neskor aj odvodime. Okrem roznych rozbiahani a brzdeni sa bezne stretavame s dolezitym rovnomerne zrychlenym pohybom, ktorym je padanie v gravitacnom poli. Viac neskor.

2 Ulohy o rovnomernom pohybe

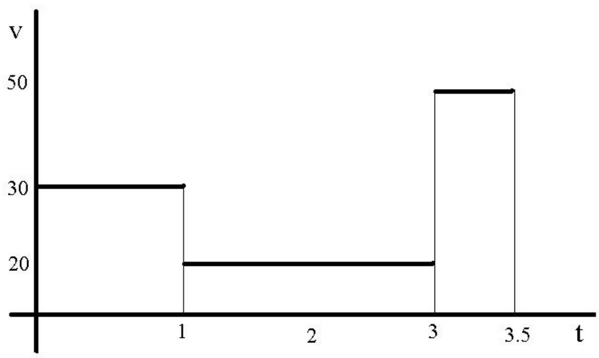
Zacnime hned z hurta, prikladom.

Priklad 2. *Auto ide po ceste hodniu* 30 *km/h, potom dve hodiny* 20 *km/h a potom pol hodiny rychlostou* 50 *km/h. Aku drahu prejde pocas tohto pohybu? Aku bude mat priemernu rychlost?*

Riesenie. Najskor si prvy a posledny krat v tychto poznamkach vypocitajme ulohu priamim vypoctom. Dostavame

$$s = 30 \times 1 + 20 \times 2 + 50 \times 0.5 = 100\ km \quad \Rightarrow \quad v = \frac{100}{3+0.5} = \frac{200}{7} km/h \approx 28.6\ km/h$$

Pozrime sa ale teraz na ulohu inak. Nakreslime si graf rychlosti v case



a vidime, ze rovnaky vysledok dostaneme, ked vypoocitame plochu pod grafom rychlosti. Zamyslite sa nad tym, ploche ktorych utvarov prislucha ktory clen z predchadzajuceho vypoctu.

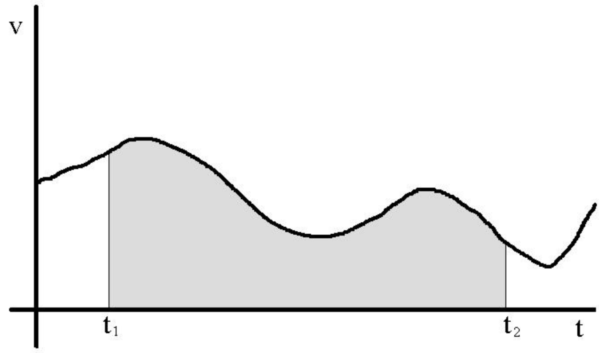
Pri troche fantazie nie je tazke spravit nasledujuce zovseobecnenie (a pre uplnost pod ciarov najdeme jeho vcelku korektny dokaz) [3] :

[2] Zo znamena ze ak $v_0 > 0$ spomaluje. Vsimnite si ze ak $v_0 < 0$, potom teleso zrychluje opacnym smerom. Od teraz budeme aj spomalovanie nazyvat zrychlovanim, nakolko to je len specialny pripad.

[3] Velmi pekny dokaz, ktoreho skratenu verziu tu uvidite, je vo vzoraku k ulohe B2.3 zimnej casti 24. rocnika FKS.

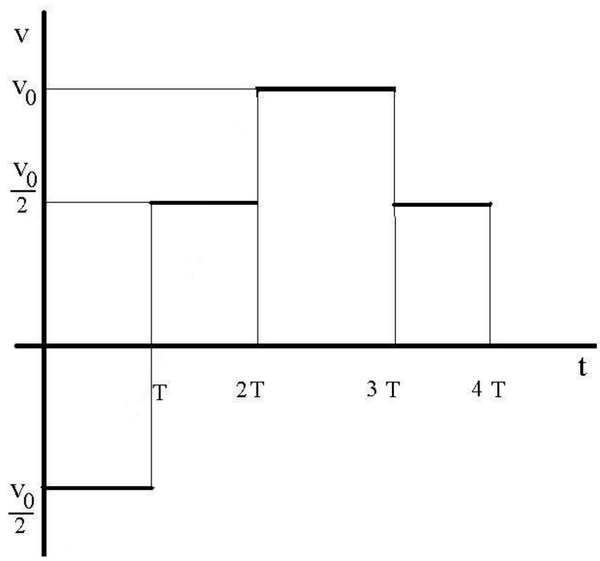
Predstavte si cloveka, ktory uteka rychlostou ako na grafe na nasledujucej strane. Ten medzi casmi t_1 a t_2 prejde nejaky drahu, oznacme ju s.

Rozdelme si teraz interval (t_1, t_2) po sekundovych usekoch. Nasa rychlost sa pocas kazdej z tychto sekund nejak meni. Zoberme si cloveka, ktory bude kazdu sekundu bezat nasou najmensou rychlostou pocas tej ktorej sekundy. Je zrejme, *Teleso sa pohybuje jednorozmernym pohybom, pricom jeho rychlost v case t je dana funkciou $v(t)$. Ak je medzi casmi t_1 a t_2 tato rychlost vzdy kladna alebo nulova, potom draha, ktoru v tomto case teleso preslo je dana plochou utvaru, ktory z prava a z lava ohranicuju zvysle priamky cez t_1, t_2, z dola x-ova os a z hora graf funkcie $v(t)$.*



Je dobre si premysliet, ako je to v pripadoch, ked graf prechadza pod casovu os. Tu totit zalezi o detaily toho, co nas zaujima. Ci nam ide o suradnicu telesa, danu napriklad vzdialenostou od nejakeho referecneho bodu, alebo o prejdenu drahu, danu napriklad spotrebovanym palivom. Na ujasnenie by mal sluzit nasledujuci priklad.

Priklad 3. *Auto sa na ceste z Liptovskeho Mikulasa pohybuje rychlostou, ktora je zadana nasledujucim grafom*



ze prejde drahu, ktora je mensia ako s. Oznacme ju s^-. Zoberme si potom cloveka, kotry bude kazdu sekundu utekat nasou najvascsou rychlostou pocas tej ktorej sekundy. Tento clovek prejde ocividne drahu vacsiu ako s, oznacme ju s^+. Plati teda $s^- < s < s^+$. Kedze nasi dvaja testovaci bezci sa pohybuju rovnomerne, nerobi nam najmensi problem (aspon v principe), ich drahy vypocitat (je to plocha pod lomenou ciarou, ktora je grafom ich rychlosti).

Co sa teraz stane, ked nerozdelime interval na sekundove, ale polsekundove useky a necham vsetkych troch ludi bezat rovnako. Zrejme opat $s^- < s < s^+$, avsak rozdiel medzi s^- a s^+ bude v tomto pripade mensi. Odporucam nakreslit si niekolko takychto situacii a rozmysliet si, ze ked budeme delenie intervalu zmensovat, s^- a s^+ sa budu na seba co raz viacej podobobat, az pre limitne male rozdelenie budu rovnake. Avsak vzdy plati $s^- < s < s^+$. Takze v tomto limitnom pripade musi $s^- = s = s^+$ (ak sa kraje k sebe blizia a s je vzdy medzi nimi, nezostava jej na konic nic ine, ako rovnat sa tymto krajom). No a pri kresleni sme sa presvedcili, ze s^- aj s^+ pri zmensovani intervalu cim dalej vernejsie napodobnuju plochu, ktora je opisana v tvrdeni. To znamena, ze prejdena draha s je prave touto plochou.

Nakreslite graf

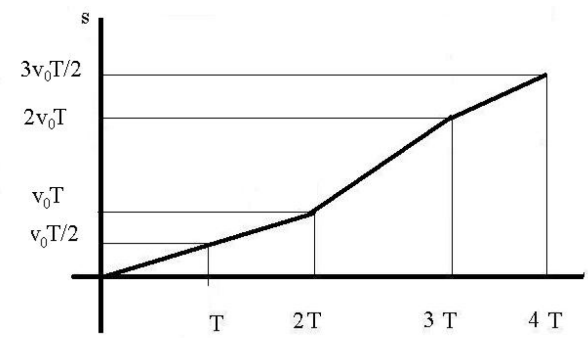
a. drahy, ktoru auto preslo

b. vzdialenosti auta od Liptovskeho Mikulasa

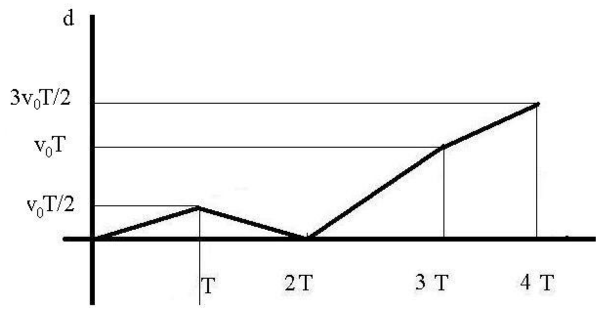
od casu.

Navod. Zaporna rychlost znamena pohyb opacnym smerom (napriklad na Hradok, nie na Ruzomberok). V jednom pripade nas to zaujima, v druhom nie.

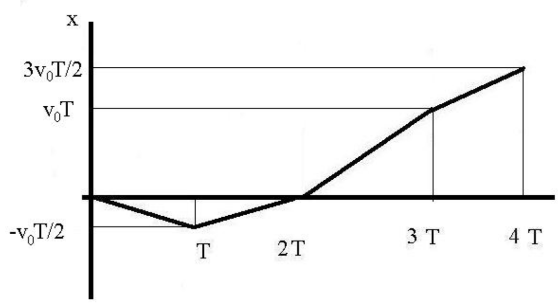
Riesenie. Vidime, ze auto sa najskor od Mikulasa vzdaluje, potom sa vracia spat a pokracuje opacnym smerom, ako sa na zaciatok vydalo. Co sa tyka prejdenej drahy, orientacia rychlosti nie je dolezita, preto bude graf vyzerat nasledovne



Ak nas zaujima vzdialenost od Mikulasa, ta bude najskor rast, potom klesat spat na nulu a potom opat rast



Ak by sme sa zaujimali o suradnicu auta, pricom nulu by sme zvolili v Mikulasi, prva cast pohybu by bola do zapornych suradnic a vysledok bude vyzerat takto

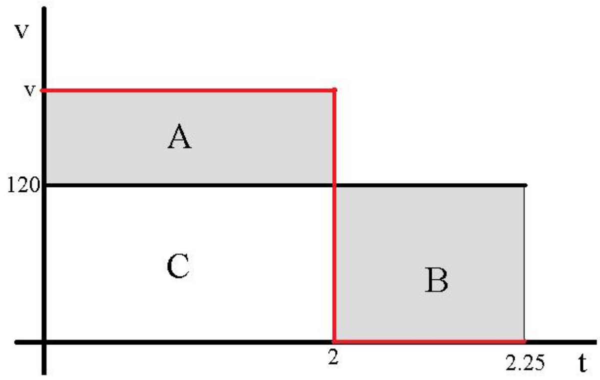


Vyzbrojeny velmi silnym tvrdenim sa teraz mozme pustit do riesenia prikladov.

Priklad 4. *Kamiony idu po dialnici* 120 *km/h. Ako rychlo ma ist ich obsluzne auto, ktore sa chce pohybovat rovnakou priemernou rychlostou, ale po kazdych dvoch hodinach si chce dat* 15 *minut prestavku?*

Navod. Nakreslit si grafy rychlosti auta a kamionu a rozmysliet, ktora plocha ma byt rovna ktorej, aby boli priemerne rychlosti rovnake.

Riesenie. Kamion ide stale 120, graf jeho rychlosti je teda rovna ciara. Auto ide dve hodiny rychlostou v, potom je 15 minut jeho rychlost nulova. Takto teda vyzeraju tieto dva grafy v jednom obrazku.



Teraz pride velmi dolezita uvaha. Ak maju mat po dve a stvrt hodine obe auta rovnaku priemernu rychlost, musia za tento cas prejst rovnaku drahu. My vieme, ze draha je dana plochou pod grafom, tie teda musia byt rovnake. Plocha 'C' je spolocna pre oba grafy, rovnat sa teda musia plochy 'A' a 'B'. Dostavame

$$120 \times \frac{1}{4} = (v - 120) \times 2 \quad \Rightarrow \quad v = 135\ km/h$$

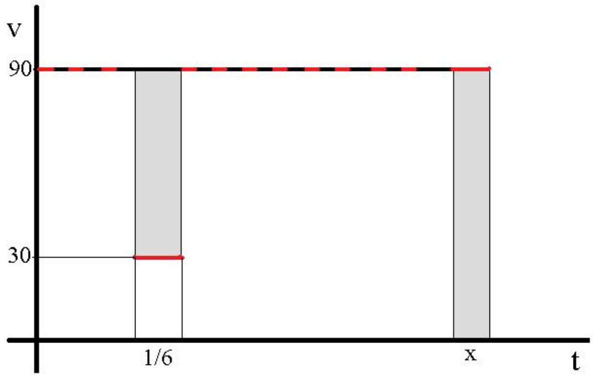
Tu si terba premysliet niekolko veci. Ako v tomto celom funguju jednotky? Ako by riesenie vyzeralo bez pouzitia grafov, priamym vypoctom?

Vidime, ze grafy nam mozu velmi zjednodusit napisanie rovnice pre nas priklad. V istom zmysle rovnicu napisu 'za nas'. Staci sa len grafu spravne spytat. Tieto veci uz dalej zdoraznovat nebudeme, je vsak dobre mat na pamati, ze kreslenie grafov je pisanie rovnic a sem tam sa zamysliet ktoru rovnicu prave 'kreslime'.

Hor sa do dalsich prikladov.

Priklad 5. *Vlak chodi na svojej trati rychlostou* 90 *km/h. Ako dlho bude meskat, ak pojde* 10 *minut* 30 *km/h?*

Riesenie. Toto je graf rychlosti riadneho a meskajuceho vlaku



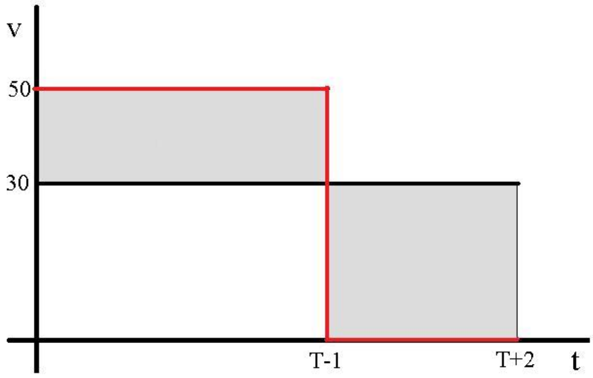
Vidime, ze meskajuci vlak musi ist este cas x, aby dohnal riadny vlak. Musi totiz dokreslit chybajuci vyznacenu plochu a teda vyfarbene plochy sa musia rovnat. Dostavame rovnicu

$$60 \times \frac{1}{6} = x \times 90 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{9}\ h$$

Priklad 6. *Sofer mal prist do mesta v stanovenom termine. Keby siel* 30 km/h*, prisiel by 2 hodiny po termine. Keby siel* 50 km/h*, prisiel by hodinu pred terminom. Ako daleko je mesto?*

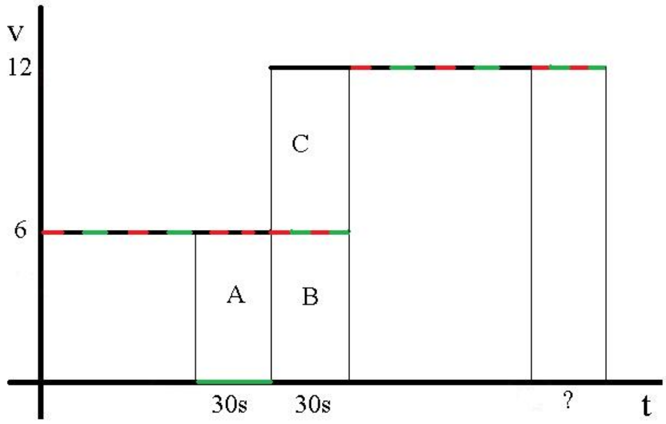
Navod. Nakreslit si grafy a rozmysliet, ktora plocha sa musi rovnat ktorej, priklad 4

Riesenie. Ak T je termin, v ktorom mal prist, nepotrebujeme vediet priamo T, zaujima nas $50(T-1)$. Z nasledujuceho grafu dostavame pre teto vyraz 225 km.



Priklad 7. *Fajo sa na letisku ponahla na lietadlo. Kraca rychlostou* 6 km/h*. Okrem toho sa v jednom useku haly nachadza pohyblivy chodnik, ktory sa pohybuje tiez* 6 km/h *a Fajo po nom moze samozrejme kracat. Stala sa vsak galiba a rozviazala sa mu snurka, na zaviazanie ktorej potrebuje na 30 sekund zastavit. Ma zastat na pohyblivom chodniku alebo mimo neho, aby mu zavezovanie ubralo z cesti co najmenej?*

Riesenie. Nakreslime si grafy troch Fajov, normalneho (cierna), zavazujuceho na pase (cervena) a zavazujuceho na zemi (zelena). Ak mate ciernobiely obrazok, malo by sa po troche casu dat usudit, ktora ciara je ktory Fajo. Potom je celkom jasne, ze pasovy Fajo musi dokreslit oproti stojacemu Fajovi mensiu plochu.



Nie? Fajo, ktory sa snuruje na pase zameska oproti normalnemu Fajovy plochu C, zatial co na zemi sa snurujuci Fajo zameska okrem toho aj plochu A.

Priklad 8. *Lod ide z Liptovskeho Mikulasa do Liptovskeho Hradku hodinu a dvadsat minut, naspat iba pol hodinu. Kolko krat rychlejsie sa pohybuje lod vzhladom na vodu ako voda vzhladom na breh?*

Navod. Uvedomit si, ze v jednom smere sa rychlosti pricitavaju, v opacnom smere sa rychlosti odcitavaju, potom priklad 4

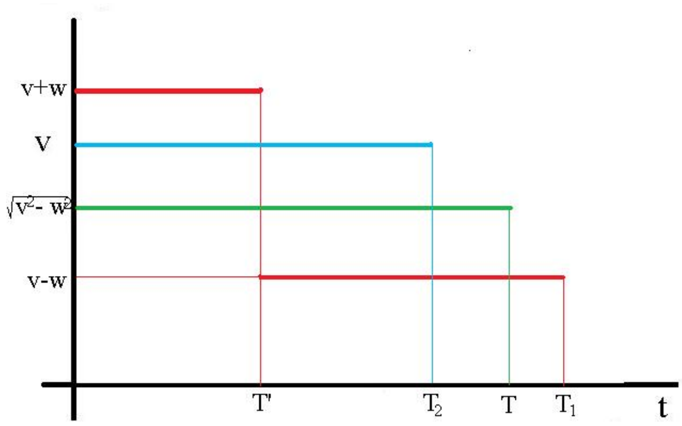
Riesenie. Z obrazka by malo byt vsetko jasne.

$$(v - w) \times \frac{5}{6} = 2w \times \frac{1}{2}$$

Vysledok. 11/5

Priklad 9. *Lietadlo lieta na priamej trase Liptovsky Mikulas - Liptovsky Hradok, a to vzdy po priamej drahe. Ak fuka vietor v smere jazdy, preleti tam a spat za cas T_1. Ak vietor fuka kolmo na trasu, preleti tam a spat za cas T_2. Ako dlho poleti lietadlo v bezvetri?*

Riesenie. Nakreslime si grafy troch lietadiel. v je rychlost lietadla vzhladom na vzduch, w je rychlost vetra, T je cas, za ktory doleti lietadlo v bezvetri, T' je cas, po ktorom sa lietadlo v rovnobeznom vetre otaca.



Z obrazka potom piseme nasledujucu sadu rovnic

$$\begin{aligned}(T_1 - T_2)(v - w) + (v + w - \sqrt{v^2 - w^2})T' &= (T_2 - T')(\sqrt{v^2 - w^2} - v + w)) \\ (v - \sqrt{v^2 - w^2}T &= (T_2 - T)\sqrt{v^2 - w^2} \\ (v + w)T' &= (T_q - T')(v - w) \\ (v + w)T' &= \frac{1}{2}Tv\end{aligned}$$

kde prve dve rovnice hovoria, ze drahy, ktore prerelia lietadla su rovnake a druhe dve hovoria, ze sa prve lietadlo otaca po prejdeni polovice tejto drahy. Toto su styri rovnice pre styri nezname T, T', v, w, nas zaujima T, pre ktore dostaneme

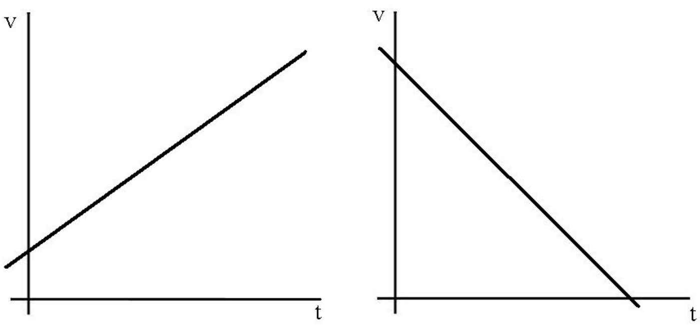
$$T = \frac{T_2^2}{T_1}$$

3 Ulohy o rovnomerne zrychlenom pohybe

Ako sme povedali v uvode, pri rovnomerne zrychlenom pohybe je rychlost dana vztahom

$$v(t) = at + v_0$$

Nasledujuci obrazok ukazuje oba pripady $a > 0, a < 0$



Z prveho z nich, z nasho vsemocneho tvrdenia a obsahu trojuholnika dostavame reklamovane tvrdenie

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

Vsimnite si, ze vzorec pre suradnicu

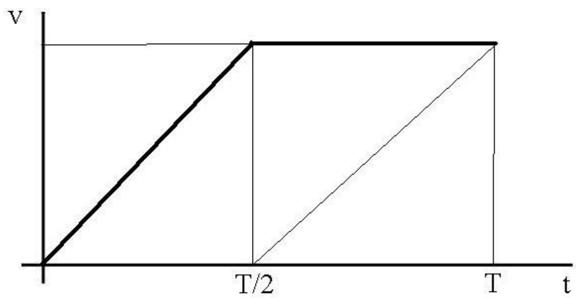
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

je spravny v pripadoch kladneho aj zaporneho zrychlenia a bez ohladu na to, ci graf presiel casovou osou.

Priklad 10. *Fajo sa rozhodol, ze ubehne* 100 *m za 9 sekund. Naplanoval si to takto : polovicu casu bude rovnomerne zrychlovat a potom bude drzat rychlost. Akou rychlostou vbehne do ciela?*

Navod. Pozor, novy utvar, trojuholnik.

Riesenie. Po tom, ako nakreslime nasledujuci graf sa na sekundu zamyslime



Vidime, ze nasu drahu (plochu) tvoria tri rovnake trojuholniky. Nie je ale nic lahsie ako vypocitat obsah styroch tychto trojuholnikov¿ Ten je $9v$, preto

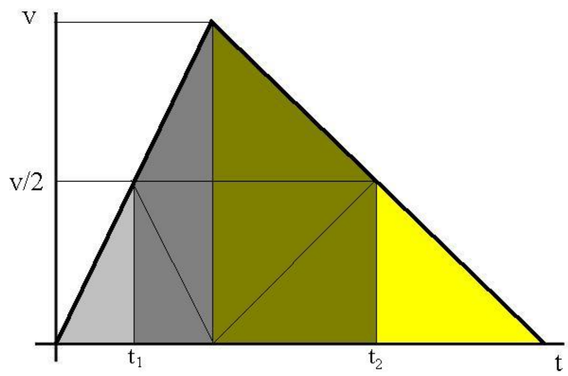
$$v = \frac{4}{3}\frac{100}{9} = \frac{400}{9}\ m/s$$

Nasledujuci priklad je jednym z najkrajsich ake som kedy videl a pocul.

Priklad 11. *Test pretekarskeho auta prebieha takto. Auto najskor rovnomerne zrychluje na rychlost v, potom z tejto rychlosti rovnomerne spomaluje naspat do statia. Aku cast drahy prejde auto rychlostou vacsou ako $v/2$? Pozor, auto zrychluje a brzdi roznymi zrychleniami*

Navod. nakreslit si graf a potom sa hrat s trojuholnikmi

Riesenie. Takto vyzera hladany graf

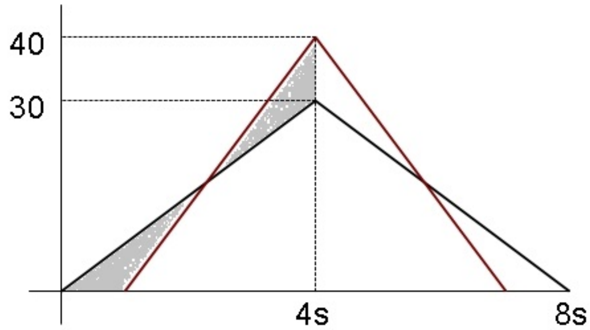


Vidime, ze sa sklada z dvoch sad trojuholnikov. Tie su v kazdej sade styry a su rovnake. Auto sa pohybuje rychlejsie ako $v/2$ medzi casmi t_1 a t_2. Drahu (plochu) medzi tymito casmi tvoria po tri trojuholniky z kazdej sady, tvoria teda 3/4 celkove drahy. A to je aj odpoved.

Priklad 12. *Dvaja ludia bezia. Prvy po starte* 4 *sekundy rovnomerne zrychluje na rychlost* 30 km/h *a potom opat* 4 *sekundy rovnomerne spomaluje az zastane. Sekundu po nom vystartuje druhy bezece, ktory* 3 *sekundy rovnomerne zrychluje na* 40 km/h *a rovnaky cas spomaluje do pokoja. Ako daleko od seba bezci zastanu?*

Navod. Nakrelslite si graf vo vhodnej mierke.

Riesenie. Takto vyzera hladany graf

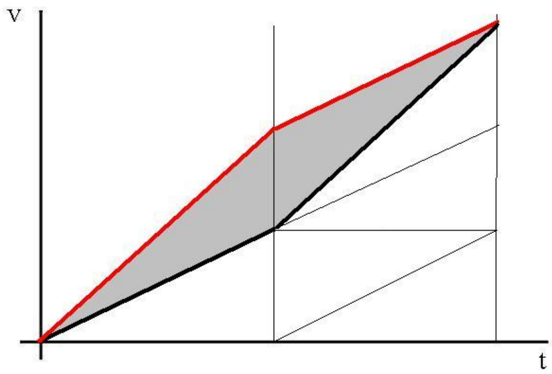


Z grafov vidime, ze drahy ktore prebehli bezci sa skladaku vzdy z dvoch rovnakych trojuholnikov a preto bezci prebehnu rovnaku drahu a zastanu na tom istom mieste. Ako by to cele vyzeralo, keby sme nezvolili mierku grafu tak, ze 10 km/h a 1 s zodpovedaju rovnakej dlzke? Trojuholniky by uz neboli rovnake, ako by sme teda zistili ze maju rovnaky obsah? Vsimnite si dva vyznacene trojuholniky.

Priklad 13. *Dvaja ludia opat bezia. Jeden bezi prvu polovicu casu so zrychlenim a, druhy so zrychlenim $2a$. Na druhu polovicu casu si zrychlenia vymenia, prvy bezi so zrychlenim $2a$, prvy so zrychlenim a. Prvy ubehol* 200 m. *Kolko ubehol druhy?*

Navod. no co budem vraviet, nakreslit grafy a hrat sa s trojuholnikmi

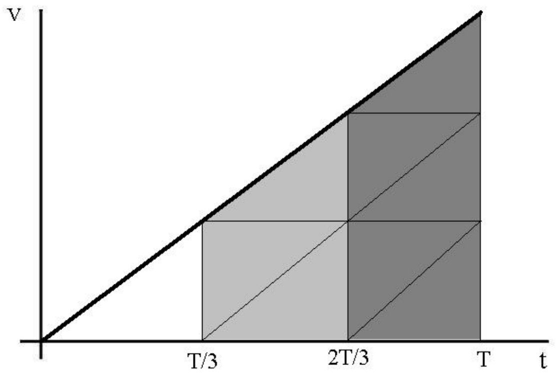
Riesenie. Graf rychlosti oboch bezcov hovori jasnou recou



Vidime, ze vsetky vyznacene trojuholniky maju rovnaku plochu. Plocha jedneho trojuholnika je 40 m, rychlejsi bezec teda prebehol o 8 km viac, 280 m.

Priklad 14. *Rozdelte* 18 *kilometrovy usek Liptovsky Mikulas - Liptovsky Hradok na 3 useky, ktore prejde rovnomerne zrychlujuce auto za rovnaky cas.*

Riesenie. Graf rychlosti auta hovori jasnou recou



Vsetky vyznacene trojuholniky maju rovnaky obsah, takze useky budu mat dlzky v pomere 1 : 3 : 5 a dlzky $2km, 6km, 10km$.

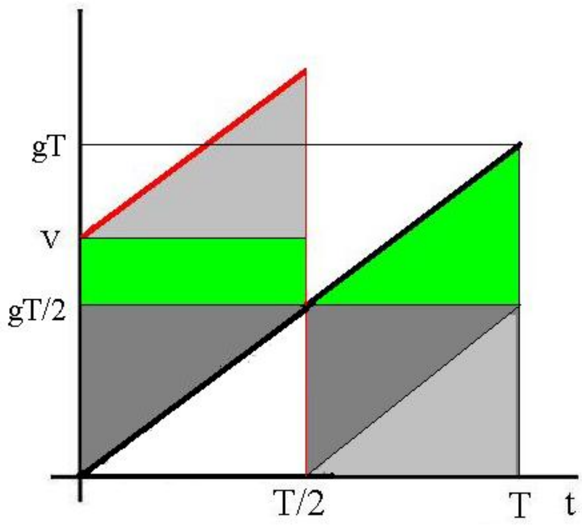
Priklad 15. *Dve auta idu za sebou rychlostou v, ked jedno zacne brzdit so zrychlenim a. Aky odstup si musi drzat druhy vodic, aby do auta pred sebou nenarazil, ak tiez zacne brzdit so zrychlenim a, ale o cas Δt neskor?*

Vysledok. $v\Delta t$

Ako bolo povedane, volny pad je rovnomerne zrychleny pohyb so zrychlenim g smerujucim nadol.

Priklad 16. *Ak teleso volne pustime, spadne na zem za cas T. Ako rychlo ho musime hodit nadol, aby spadlo za polovicny cas?*

Riesenie. V tomto priklade si zvolme kladny smer nadol. Grafy rychlosti volne padajuceho a hodeneho telesa potom vyzeraju takto

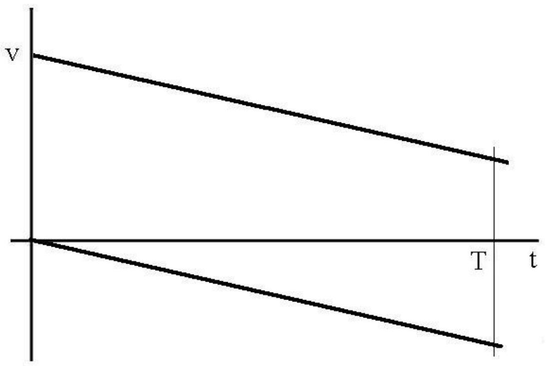


kde obe priamky maju rovnaky sklon. Vyznacene utvary maju rovnaku plochu (preco?) z rovnosti drah (ploch) potom dostavame

$$\left(v - g\frac{T}{2}\right)\frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{T}{2}\left(gT - g\frac{T}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{3}{4}gT$$

Priklad 17. *Jednu lopticku nechame padat z vysky h. Druhu z miesta, kam by dopadla vyhodime nahor rychlostou v. V akej vyske sa zrazia?*

Riesenie. Z grafu je zrejme, ze sucet vzdialnosti ktore gulicky prejdu za cas T je prosto vT



Stretnu sa teda v case $\tau = h/v$ za ktory sponda gulocka prejde drahu

$$H = h\left(1 - \frac{gh}{2g}\right)$$

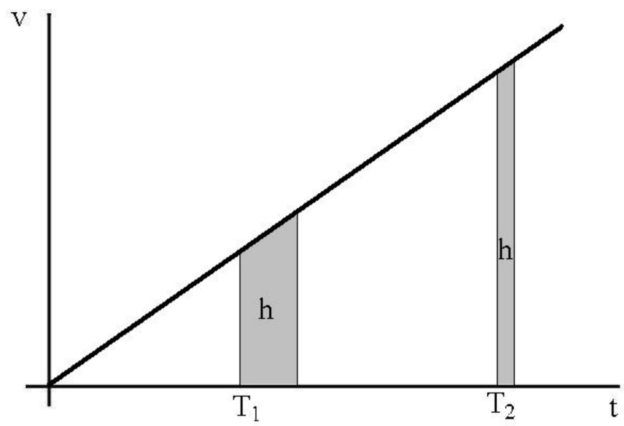
Ako sa tento priklad dal riesit cez zmenu vztaznej sustavy?

Priklad 18. *Dve telesa pustime z toho isteho miesta s casovym rozostupom T. Ako sa bude menit casovy rozostup v ktorom dopadnu s meniacou sa vyskou, z ktorej ich pustime?*

Vysledok. nebude sa menit

Priklad 19. *Dve telesa pustime naraz z miest, ktore su h nad sebou. Ako sa bude menit casovy rozostup, v ktorom dopadnu s meniacou sa vyskou, z ktorej ich pustime?*

Riesenie. Tu je graf rychlosti oboch telies (kladny smer je opat nadol)

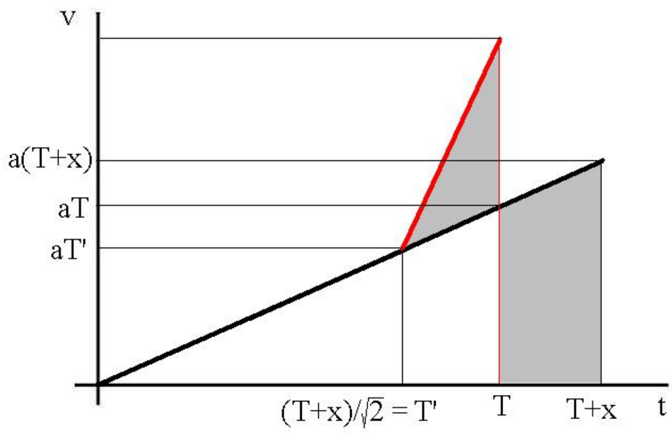


Ano, je tam iba jedna ciara. Vidime, ze ak prve teleso dopadne v casoch T_1, T_2, pricom $T_1 < T_2$, druhe teleso musi padat naviac dlhsie, aby dokreslilo danu plochu (drahu) h, v prvom pripade. Preto cim zvyssa takto telesa pustime, tych rychlejsie po sebe spadnu.

Obe tieto ulohy je dobre si premysliet mimo kontextu grafov, ako to vlastne funguje a co k tomu moze povedat zmena vztaznej sustavy.

Priklad 20. *Fajo zaspal na hodinu. Uteka preto do skoly so zrychlenim a. V polke drahy zistil, ze to nestiha a preto zvacsil svoje zrychlenie na $2a$ a dobehol presne na cas. Kolko by meskal, keby stale utekal so zrychlenim a?*

Riesenie. Z grafu vidime, ze vyznacene plochy sa musia rovnat (T' je cas, v ktorom je Fajo v polke drahy)



Dostavame teda

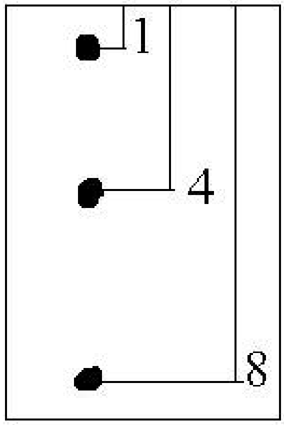
$$aTx + \frac{1}{2}ax^2 = (T - T')\left[2a(T - T') + aT' - aT\right] \quad \Rightarrow \quad x = (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)T$$

Priklad 21. *Vlak sa na trati medzi Liptovskym Mikulasom a Liptovskym Hradkom pohybje priemernou rychlostou v. Pri tom sa ale rozbieha, ide rovnomerne a nakoniec brzdi? Brzdienie trvalo dohromady cas T', cela cesta T? Akou maximalnou rychlostou sa tento vlak pohybuje?*

Navod. pozor, novy objekt, lichobeznik

Vysledok. $\frac{2T}{2T+T'}v$

Priklad 22. *Na nasledujucej fotke su tri kvapky, ktore za sebou v rovnakych rozostupoch spadli z odkvapu*



Ako vysoko nas okrajom fotky je odkvap?

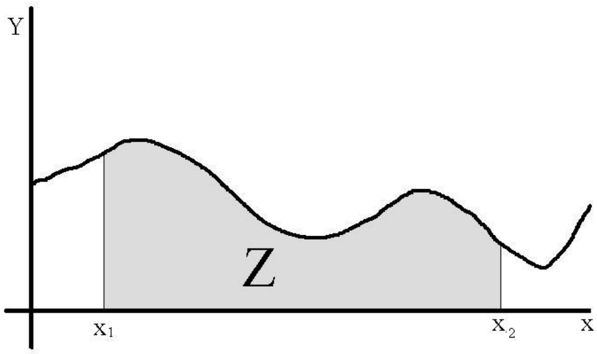
Vysledok. 17/8 v jednotkach z fotky

4 Grafy v inych ulohach

Ked sa nad tym zamyslime, v uvode sme dokazali o cosi vseobecnejsie tvrdenie. Konkretne premmennou nemusi byt len cas a meniaca sa velicina nemusi byt len rychlost. Majme teda nejaku velicinu Z, ktora je pre nemeniace sa Y dana vztahom

$$Z = Yx$$

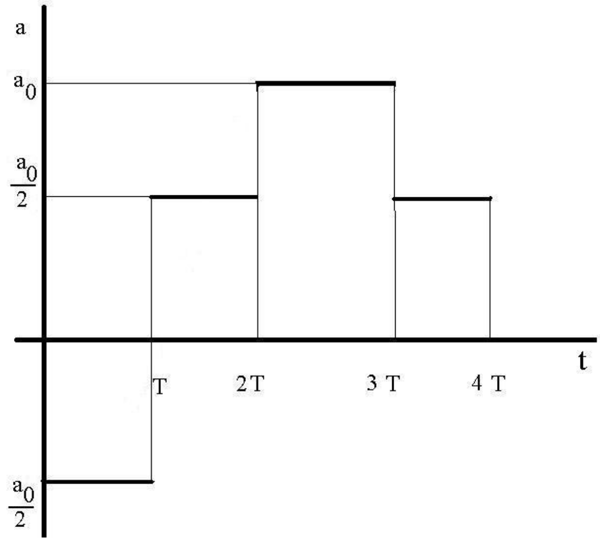
Ak sa potom Y meni ako funkcia x, teda $Y(x)$, hodnotu veliciny Z medzi x_1 a x_2 najdeme uplne analogicky, ako drahu medzi casmi t_1 a t_2. Nesmie chybat obrazok



Na co to moze byt dobre?

S jednym z takych vztahov sme sa uz stretli. Pri nemeniacom sa zrychleni je rychlost, ktoru teleso nadobudne za cas t rovna $a \times t$. Ak sa teda zrychlenie meni, mozme rychlost zistit z grafu zrychlenia od casu, rovnako ako sme doteraz zistovali drahu.

Priklad 23. *Variacia na priklad 3. Auto sa na ceste z Liptovskeho Mikulasa pohybuje so zrychlenim, ktore je zadane nasledujucim grafom*



Nakreslite graf

a. *rychlosti, ktoru ma auto na tachometri*

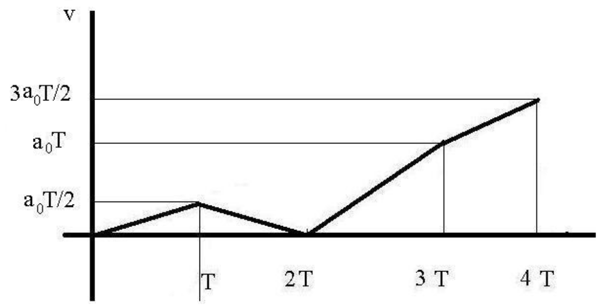
b. *rychlosti, ak berieme do uvahy aj orientaciu*

c. *drahy, ktoru auto preslo*

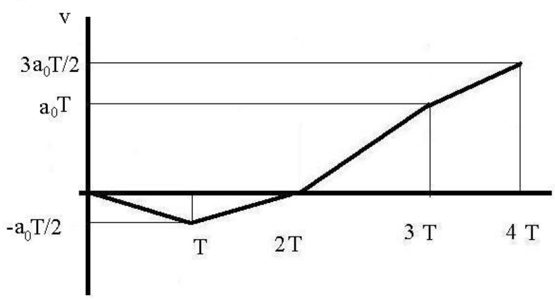
d. *vzdialenosti auta od Liptovskeho Mikulasa*

od casu.

Riesenie. Postupom uz dobre znamym dostavame graf rychlosti v prvom pripade takyto



a so znamienkom takyto



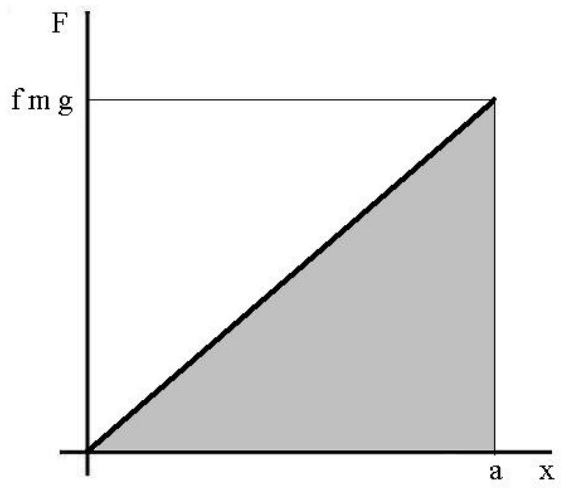
Z tychto grafov podobne ako v ulohe 3 mozme zostrojit grafy prejdenej drahy a vzdialenosti. Pre useky, na ktorych sa rychlost rovnomerne meni bude grafom drahy parabola (preco?).

No a nakoniec je dolezite vsimnut si, ze vhodnym jednorozmernym parametrom nebyva vzdy cas.

Priklad 24. *Koberec mame polozeny na dokonale hladkej podlozke ($f = 0$). Chceme ho teraz pretiahnut na podlozku, s ktorou ma koeficient trenia f. Aku pracu bude treba vykonat na toto pretiahnute? Koberece tahame tak pekne rovnobezne na rozhranie, ktore je tiez pekne rovne. Koberec je stvorec o hrane a a hmotnosti m.*

Navod. Zamysliet sa, ako sa da rozumne parametrizovat poloha koberca, ako sa potom meni trecia sila, proti ktorej posobime a ako sa teraz da vyzuit predchadzajuce tvrdenie.

Riesenie. Ak je na druhej podlozke dlzka koberca x, potom trecia sila, proti ktorej musie posobit, je dana vztahom $F = mgx/a$. Zaciatok nasho procesu je $x = 0$, koniec je $x = a$. Na co je to ale dobre? Pre nemeniacu silu je praca, ktoru vykoname proti sile F dana vztahom $W = Fs$. Ak sa teraz po drahe sila meni, praca, ktoru vykoname, je podla predchadzajuceho tvrdenia rovna ploche pod grafom tejto sily. Graf sily je jednoducha priamka, plocha trojuholnik a jeho obsah



$$W = \frac{1}{2}afmg$$

Priklad 25. *V predchadzajucej ulohe netahame z hladkej podlozky, ale medzi podlozkami a kobercom je trene postupne f_1, f_2 ako bude vysledok vyzerat teraz?*

Navod. Podobne ako v predchadzajucej ulohe, avsak sila, proti ktorej treba posobit na zaciatku ($x = 0$) nie je nulova. Zapisat vyslednu silu ako funkciu x, nakreslit graf, kupit farbu, graf vyfarbit a z ubytku hmotnosti konzervy s farbou zistit plochu a teda aj potrebnu pracu.

Vysledok. $W = \frac{1}{2}a(f_1 + f_2)mg$

Priklad 26. *Na naklonenej rovine so sklonom α rastie koeficient trena so vzdialenostou od vrchola roviny linearne $f = kx$. V akej vzdialenosti od vrcholu roviny sa zastavi teleso, ktore volne pustime?*

Navod. Priklad 24, uvedomit si ako vyzera sila a zakon zachovania energie

Priklad 27. *Dva cerviky lezu ponad* 10 *cm vysoku, velmi tenku prekazku. Cerviky maju* 10 *a* 20 *centimetrov a pritom*

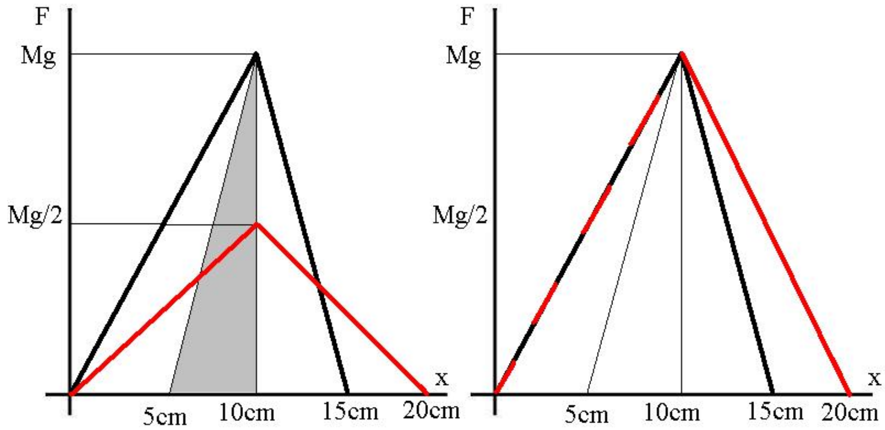
a. maju rovnaku hmotnost M

b. maju rovnaku hmotnost na jeden meter dlzky

V akom pomere su prace, ktore tieto cerviky musia vykonat na prekonanie prekazky?

Navod. Porozmyslat, ako by sa dala parametrizovat poloha cervika, ako od tejto polohy zavysi sila, proti ktorej cervik posobi a potom to uz je hracka

Riesenie. Oznacme x vzdialenost, ktoru cervik presiel po stene. Pre $x > 10\ cm$ je cervikova hlava uz na zostupe. Je dolezite si uvedomit, ze pre kratky cervik na zostupe posobi nejakou silou iba do polovice steny, zvysnu polovicu sa uz vezie. Dlhy cervik musi posobit silou az kym sa jeho hlava opat nedotkne zeme. Po troche rozmyslania dostaneme nasledujuce dva grafy sil, proti ktorym posobia cerviky



Vidime, ze v prvom pripade su to dva trojuholniky proti trom, v druhom pripade styry trojuholniky proti trom. Vyledne pomery su teda 2/3 a 4/3, pricom ide o pomery krasi ku dlhsi cervik.

Presvedcte sa, ze celkova praca, ktoru dostanete pre cervikov z grafov, je rovna zmene potencialnej energie cervika, teda umerna zmene vysky taziska cervika pri preliezani.

Priklad 28. *Cez kladku je prevesene lano dlzky L v rovnovaznej polohe. Kedze tato rovnovaha je labilna, lano sa zacne z kladky odmotavat. Vypocitajte, akou rychlostou bude opustat kladku. Priklad vypocitajte najskor pomocou grafov podobne ako predchadzajucu ulohu a potom pomocou zmeny vysky taziska.*

V predchadzajucich ulohach by sme sa zaobisli aj bez pouzitia grafov. Na zaver teda uloha, kde by to uz bez ich neslo.

Priklad 29. *Na stole je polozena retiazka dlzky L. Medzi retiazkou a stolom je koeficient trenia f. Vypocitajte, aka najvacsia cast retiazky moze prevysat zo stola, aby retiazka nespadla. Z tejto polohy zacne retiazka zo padat. Vypocitajte, akou rychlostou bude retiazka opustat stol.*

Navod. Zakon zachovania energie avsak treba zaratat pracu proti trecej sile, ktoru vypocitame z grafu.

5 Za obzorom tychto poznamok

Tvrdenie, ktore sme dokazali a potom zovseobecnili je vlasnte nasledujucim tvrdenim.

Nech je nejaka velicina Z pre nemeniace sa Y dana vztahom

$$Z = Yx$$

kde x je nejaky paramater. Ak sa teraz s tymto parametrom x nase Y meni, tento vzorec nemozme pouzit. Avsak pozrime sa na velmi maly usek parametra x, ktory oznacime $dx = x_2 - x_1$, kde x_2 a x_1. Ak je tento usek ozaj velmi maly, potom sa velicina $Y(x)$ pocas neho velmi nemeni a mozme ju povazovat za konstantu. Teraz mozme pouzit nas vzorec a dostavame

$$dZ = Ydx$$

kde dZ oznacuje prirastok veliciny Z na useku medzi x_2 a x_1. Vsimnite si, ze tento prirastok bude tiez velmi maly, preto oznacenie dZ. Avsak ak je prirastok nejakej veliciny na velmi malom useku dany takto, potom na velkom useku medzi x_A a x_B je hodnota veliciny Z dana urcitym integralom

$$Z(x_A \to x_B) = \int_{x_A}^{x_B} Y(x)dx$$

Pripadne neurcitym integralom ako funckia x

$$Z(x) = \int Y(x)dx + Z_0$$

Ak chcete toto je definicia toho, co je integral. A poznatok, ze integral je vlastne plocha pod grafom, je neoddelitelnou castou matematicko-fyzikalneho folkloru. Toto zas napriklad plynie z uvahy takmer na vlas rovnakej, ako sme robili v uvode, kde sme nechavali dvoch ludi bezat pomalsie a rychlejsie ako my a potom ich grafy priblizovali nasemu.

Tiez si vsimnime, ze jeden z predchadzajucich vztahov sa da pisat ako

$$Y = \frac{dZ}{dx}$$

To znamena ze ak Y je derivaciou veliciny Z podla nejakeho parametra[4], potom Z je integralom Y podla tohto parametra. Nase tvrdenie sa teda da pouzit vzdy pre veliciny, ktore su v tomto vztahu.

Cely tento text sme teda veselo integrovali aj ked nam velmi dlho kazdy tvrdil, ze to je tazke. Ako vidime, integrovat lahke funkcie nie je vobec tazke. Problem prichadza ked zavyslost rychlosti od casu, pripadne cohokovlek ineho od patricneho parametra, prestava by linearna a nevystacime si s jednoduchym 'jednapolovicavyskakratzakladna'.

Ale o tom je uz uplne iny text.

[4] Ako napriklad rychlost je derivaciou drahy alebo sila derivaciou energie.

6 Pouzita a odporucana literatura

- Zbierky riesenych uloh Naboja FKS, 1999 az 2009
- Zadania uloh FKS
- Zbierka riesenych uloh FX, 1. a 3. rocnik
- Archiv uloh Fyzikalenj Olympiady
- Studijne texty ceskej FO - Přemysl Šediv y, Ivo Volf - Dopravn i kinematika a grafy