

Maticové modely v teoretickej fyzike

Domáca úloha 1 - prednášky 1 a 2

Akokoľvek otázky smelo smerujte na
juraj(a)tekel(b)gmail(c)com

Príklad 1 (Štatistika vlastných hodnôt). Majme takéto tri rôzne súbory náhodných štvorcových $N \times N$ matíc

- symetrická matica, ktorej vstupy sú rovnomerne náhodne 1 a -1 ,
- symetrická matica, ktorej vstupy sú rovnomerne náhodne 2 a -2 ,
- symetrická matica, ktorej vstupy sú rozdelené podľa normálneho rozdelenia

$$N(\mu = 0, \sigma^2 = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- hermitovská matica, ktorej diagonálne vstupy sú rozdelené podľa $N(0, 1)$ a reálna a imaginárna časť mimodiagonálnych vstupov podľa $N(0, 1/2)$.

Postupne pre zväčšujúce sa hodnoty N pre všetky tri súbory

- vygenerujte väčší počet matíc zo súboru,
- nájdite ich vlastné hodnoty,
- vykreslite histogram týchto vlastných hodnôt,
- sledujte, čo sa s týmto histogramom deje pri zväčšovaní N .

Príklad 2 (Diagramy). Pre model jednej hermitovskej náhodnej $N \times N$ matice s rozdelením pravdepodobnosti

$$P(M) \sim e^{-\frac{1}{2}\text{Tr}(M^2)}$$

explicitne vypočítajte strednú hodnotu

$$\langle \text{Tr}(M^6) \rangle .$$

Príklad 3 (Rezolventa a generujúca funkcia.). Pre ľubovoľné rozdelenie pravdepodobnosti $\rho(x)$ zavedme funkciu

$$\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\rho(x)}{z-x} .$$

Túto funkciu voláme rezolventa. Rozmyslite si, že jej význam je v tom, že koeficienty jej rozvoja v mocninách $1/z$ sú momenty rozdelenia ρ , tj. že platí

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{1}{z^{k+1}} ,$$

kde m_k nejak súvisí s k tým momentom $\langle x^k \rangle$.

Ak zadefinujeme priamo generujúcu funkciu

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x^k \rangle t^k$$

rozmyslite si, že platí

$$\omega(z) = \frac{1}{z} \phi(1/z) .$$

Príklad 4 (Sedlový bod). Majme funkcie v tvare

$$\Delta_N(x) = C_N e^{-N^2 f(x)}$$

pre nejakú funkciu $f(x)$. Rozmyslite si, že táto postupnosť konverguje k δ -funkcii v minime funkcie $f(x)$, tj.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Delta_N(x) \phi(x) = \phi(x_0),$$

kde $f'(x_0) = 0$. Nájdite normalizačné konštanty C_N aby to platilo. Čo ak je táto podmienka splnená pre viacero bodov?

Príklad 5 (Diskontinuita odmocniny). Funkcia $f(x) = \sqrt{x}$ je ako funkcia reálne premennej dobre definovaná pre $x \geq 0$. Pre komplexný argument $z = r e^{i\theta}$ je jej hodnota

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2},$$

čo dáva pre z blížiac sa k zápornej reálnej osi dva rôzne výsledky $r \pm i$ podľa toho, z ktorého smeru prichádzame.

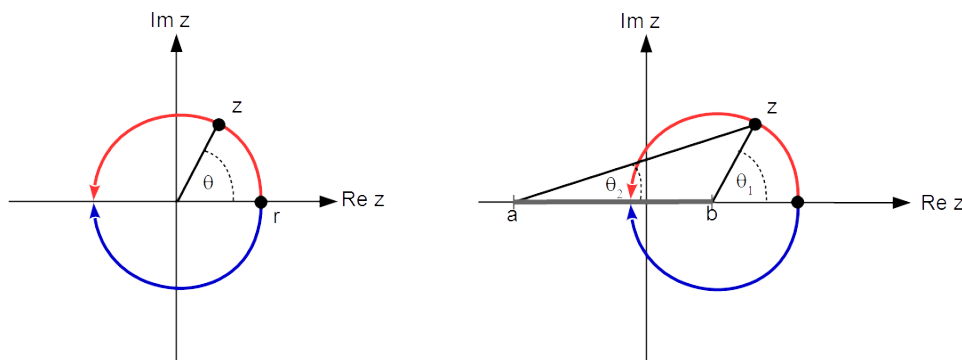
Na základe toho si rozmyslite, že funkcia

$$\omega(z) = \frac{1}{2} V'(z) - h(z) \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

bude spĺňať rovnicu

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda)$$

pre vhodne zvolené $a, b, h(z)$.



Príklad 6 (Kvartický model). Majme kvartický model jednej hermitovskej matice, tj.

$$P(M) \sim e^{-N^2 [\frac{1}{2} \frac{1}{N} \text{Tr}(M^2) + g \text{Tr}(M^4)]},$$

čo je situácia s $V(x) = rx^2/2 + gx^4$. Nájdite $a, b, h(z)$ vo výraze

$$\omega(z) = \frac{1}{2} V'(z) - h(z) \sqrt{(z-a)(z-b)},$$

pre ktoré táto funkcia spĺňa podmienky

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda), \quad \omega(z) \sim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z}.$$

Z rozvoja funkcie $\omega(z)$ v mocninách $1/z$ nájdite prvé dva momenty príslušnej hustoty vlastných hodnôt. Zo vzťahu

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} [\omega(\lambda + i\varepsilon) - \omega(\lambda - i\varepsilon)]$$

nájdite hustotu vlastných hodnôt. Za akých podmienok je táto hustota dobre definovaná v prípadoch $r < 0$ a $g < 0$.