Maticové modely v teoretickej fyzike
Domáca úloha 1 - prednášky 1 až 4

Akékoľvek otázky smelo smerujte na
`juraj(a)tekel(b)gmail(c)com`

Príklad 1 (Štatistika vlastných hodnôt). Majme takéto tri rôzne súbory náhodných štvorcových $N \times N$ matíc

a. symetrická matica, ktorej vstupy sú rovnomerne náhodne 1 a -1,

b. symetrická matica, ktorej vstupy sú rovnomerne náhodne 2 a -2,

c. symetrická matica, ktorej vstupy sú rozdelené podľa normálneho rozdelenia

$$N(\mu = 0, \sigma^2 = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

d. hermitovská matica, ktorej diagonálne vstupy sú rozdelené podľa $N(0,1)$ a reálna a imaginárna časť mimodiagonálnych vstupov podľa $N(0,1/2)$.

Postupne pre zväčšujúce sa hodnoty N pre všetky tri súbory

- vygenerujte väčší počet matíc zo súboru,
- nájdite ich vlastné hodnoty,
- vykreslite histogram týchto vlastných hodnôt,
- sledujte, čo sa s týmto histogramom deje pri zväčšovaní N.

Príklad 2 (Diagramy). Pre model jednej hermitovskej náhodnej $N \times N$ matice s rozdelením pravdepodobnosti

$$P(M) \sim e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M^2\right)}$$

explicitne vypočítajte strednú hodnotu

$$\left\langle \mathrm{Tr}\left(M^6\right) \right\rangle \; .$$

Príklad 3 (Polkruhové rozdelenie pravdepodobnosti). Ukážte, že pre polkruhové rozdelenie pravdepodobnosti

$$\rho(x) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}$$

momenty $\left\langle x^{2n} \right\rangle$ dané n-tým Catalanovym číslom

$$\left\langle x^{2n} \right\rangle = \left(\frac{R}{2}\right)^{2n} C_n = \left(\frac{R}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \; .$$

Tiež ukážte, že z rekurentného vzťahu pre Catalanove čísla

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

dostaneme pre generujúcu fuknciu $\phi(t) = \sum m_n t^n$ kvadratickú rovnicu z prednášky.

Príklad 4 (Rezolventa a generujúca funkcia.). Pre ľubovoľné rozdelenie pravdepodobnosti $\rho(x)$ zaveďme funkciu

$$\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\rho(x)}{z-x} \ .$$

Túto funkciu voláme rezolventa. Rozmyslite si, že jej význam je v tom, že koeficienty jej rozvoja v mocninách $1/z$ sú momenty rozdelenia ρ, tj. že platí

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{1}{z^{k+1}} \ ,$$

kde m_k nejak súvisí s k tym momentom $\left\langle x^k \right\rangle$.

Ak zadefinujeme priamo generujúcu funkciu

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle x^k \right\rangle t^k$$

rozmyslite si, že platí

$$\omega(z) = \frac{1}{z}\phi(1/z) \ .$$

Príklad 5 (Sedlový bod). Majme funkcie v tvare

$$\Delta_N(x) = C_N e^{-N^2 f(x)}$$

pre nejakú funkciu $f(x)$. Rozmyslite si, že táto postupnosť konverguje k δ-funckií v minime funkcie $f(x)$, tj.

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Delta_N(x)\phi(x) = \phi(x_0) \ ,$$

kde $f'(x_0) = 0$. Nájdite normalizačné konštanty C_N aby to platilo. Čo ak je táto podmienka splnená pre viacero bodov?

Príklad 6 (Diskontinuita odmocniny). Funkcia $f(x) = \sqrt{x}$ je ako funcia reálne premennej dobre definovaná pre $x \geq 0$. Pre komplexný argument $z = re^{i\theta}$ je jej hodnota

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \ ,$$

čo dáva pre z blížiace sa k zápornej reálnej osi dva rôzne výsledky $r \pm i$ podľa toho, z ktorého smeru prichádzame.

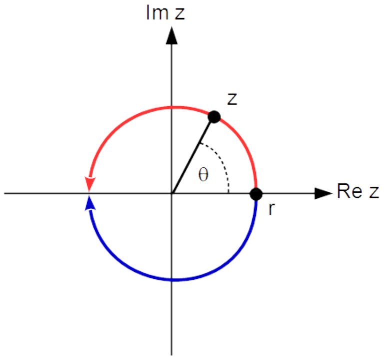
Na základe toho si rozmyslite, že funkcia

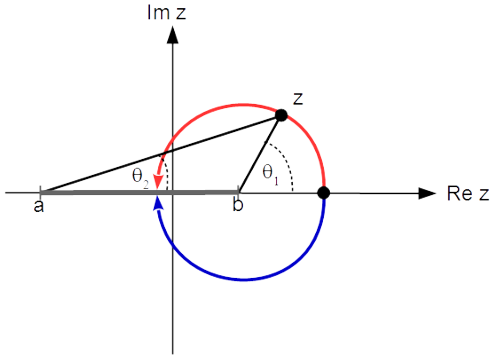
$$\omega(z) = \frac{1}{2}V'(z) - h(z)\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

bude spĺäať rovnicu

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda)$$

pre vhodne zvolené $a, b, h(z)$.





Príklad 7 (Kvartický model)**.** Majme kvartický model jednej hermitovskej matice, tj.

$$P(M) \sim e^{-N^2\left[\frac{1}{2}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(M^2\right)+g\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(M^4\right)\right]} ,$$

čo je situácia s $V(x) = rx^2/2 + gx^4$. Nájdite $a, b, h(z)$ vo výraze

$$\omega(z) = \frac{1}{2}V'(z) - h(z)\sqrt{(z-a)(z-b)} ,$$

pre ktoré táto funkcia spĺňa podmienky

$$\omega(\lambda + i\varepsilon) + \omega(\lambda - i\varepsilon) = V'(\lambda) \ , \ \omega(z) \sim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \ .$$

Z rozvoja funkcie $\omega(z)$ v mocninách $1/z$ nájdite prvé dva momenty príslušnej hustoty vlastných hodnôt. Zo vzťahu

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\omega(\lambda + i\varepsilon) - \omega(\lambda - i\varepsilon)\right]$$

nájdite hustotu vlastných hodnôt. Za akých podmienok je táto hustota dobre definovaná v prípade $r < 0$ a v prípade $g < 0$.